Вариант №63. Николаев Степан

$f(x) = 66x_1^2 + 128x_1x_2 + 64x_1x_3 - 14x_1 + 66{,}5x_2^2 + 80x_2x_3 - 9x_2 + 42x_3^2 - 5x_3.$

$$x^0 = \begin{pmatrix} -97{,}47 \\ -64{,}17 \\ -10{,}99 \end{pmatrix}.$$

1) Докажем существование глобального минимума.

f непрерывна на $\mathbb{R}^3$, т. к. это многочлен.

Выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} f(x) = 66 &\left(x_1 + \frac{32}{33}x_2 + \frac{16}{33}x_3 - \frac{7}{66}\right)^2 \\ &+ \frac{293}{66}\left(x_2 + \frac{592}{293}x_3 + \frac{151}{293}\right)^2 \\ &+ \frac{2450}{293}\left(x_3 - \frac{437}{980}\right)^2 - \frac{1405}{392}. \end{aligned}$$

При $\|x\| \to \infty$ сумма квадратов стремится к бесконечности: иначе все три скобки были бы ограничены, а значит, и x_1, x_2, x_3 тоже.

Коэффициенты перед квадратами положительные, поэтому

$$f(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty.$$

Следовательно, f бесконечно растущая. Так как она непрерывна, глобальный минимум существует.

2) Найдём стационарную точку.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 132x_1 + 128x_2 + 64x_3 - 14 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 128x_1 + 133x_2 + 80x_3 - 9 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 64x_1 + 80x_2 + 84x_3 - 5 = 0. \end{cases}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 132x_1 + 128x_2 + 64x_3 = 14, \\ 128x_1 + 133x_2 + 80x_3 = 9, \\ 64x_1 + 80x_2 + 84x_3 = 5. \end{cases}$$

Из первой строки вычтем удвоенную третью:

$$x_1 - 8x_2 - 26x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 + 8x_2 + 26x_3.$$

Из второй строки вычтем удвоенную третью:

$$27x_2 + 88x_3 = 1.$$

Подставим x_1 в третью строку:

$$64(1 + 8x_2 + 26x_3) + 80x_2 + 84x_3 = 5,$$

$$592x_2 + 1748x_3 = -59.$$

Теперь из двух уравнений исключаем x_2:

$$\begin{cases} 27x_2 + 88x_3 = 1, \\ 592x_2 + 1748x_3 = -59. \end{cases}$$

$$27 \cdot (592x_2 + 1748x_3) - 592 \cdot (27x_2 + 88x_3) = 27 \cdot (-59) - 592,$$

$$-4900x_3 = -2185 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{437}{980}.$$

$$x_2 = \frac{1 - 88x_3}{27} = -\frac{347}{245}, \qquad x_1 = 1 + 8x_2 + 26x_3 = \frac{619}{490}.$$

$$\boxed{x^* = \begin{pmatrix} \frac{619}{490} \\ -\frac{347}{245} \\ \frac{437}{980} \end{pmatrix}}$$

3) Проверим матрицу Гессе.

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 132 & 128 & 64 \\ 128 & 133 & 80 \\ 64 & 80 & 84 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = 132 > 0, \qquad \Delta_2 = 132 \cdot 133 - 128^2 = 1172 > 0, \qquad \Delta_3 = \det f''(x) = 19600 > 0.$$

По критерию Сильвестра матрица положительно определена. Значит, функция строго выпуклая, а найденная стационарная точка — единственный глобальный минимум.

$$\boxed{f(x^*) = -\frac{1405}{392} \approx -3{,}584184.}$$