Сверка с фотографиями: как связаны номера

Редакция от 22 ноября 2026 года учитывает 79 фотографий тетради IMG_1948–IMG_2027 (файл IMG_2000 отсутствует) и 19 снимков доски IMG_1925–IMG_1943. В тетради явно пронумерованы вопросы 1–26. Нумерация 30 глав старого пособия сохранена, чтобы прежние ссылки и изученный материал не потерялись.

Главный маршрут — номер вопроса на фото, затем указанные главы. Отдельной главы 7, тем первого приближения и Лотки–Вольтерры на новых снимках нет; эти главы сохранены как дополнения старого комплекта. Вопрос 10 тетради использует главы 11–12, а вопрос 16 — метод вариации в главе 18. Восстановление уравнения по ФСР из главы 18 является дополнительной частью.

Фотографии подтверждают содержание записанного конспекта, но сами по себе не устанавливают дату будущего экзамена или официальный актуальный список. Рабочие ориентиры старых файлов — полный проход и закрепление к 10 января 2027 года; дата комиссии в них не указана. Новый план начинает работу 22 ноября 2026 года.

Фото №	Тема	Главы	IMG
1	ОДУ, порядок и решение	1	1948
2	Геометрия ОДУ	2	1949–1952
3	Модели движения, распада и колебаний	3	1953
4	Коши-Липшиц	4	1954–1957
5	Интегральная форма и Пикар	5	1958–1959
6	Пеано и непрерывность	6	1960
7	Продолжение решений	8	1961–1962
8	Разделяющиеся переменные	9	1963–1964
9	Однородная правая часть и лучи	10	1965–1967
10	Нормальные и линейные системы	11, 12	1968–1971
11	Зависимость вектор-функций и Вронскиан	13	1972–1974
12	ФСР и фундаментальная матрица	14	1975–1976
13	Определитель и Лиувилль	15	1977–1979
14	ЛНС и вариация постоянных	16	1980–1982
15	Скалярное линейное уравнение как система	17	1983–1987

Фото №	Тема	Главы	IMG
16	Вариация постоянных для скалярного ЛНУ	18	1988–1989
17	Простые характеристические корни	19	1990–1992
18	Кратные корни и смещение	20	1993–1995
19	Квазимногочлен и резонанс	21	1996–1998
20	Интегральная формула Коши	22	1999–2001
21	Постоянная матрица и жордановы цепочки	23	2002–2007
22	Векторный квазимногочлен	24	2008
23	Автономная система и траектории	25	2009–2013
24	Фазовые портреты линейной системы	26	2014–2019
25	Устойчивость по определению	27	2020–2023
26	Линейная устойчивость и спектр	28	2024–2027

Что изменено по существу

По каждому вопросу добавлен блок «Доработка по фотографиям» с привязкой к файлам. Дописаны незавершённые переходы: обратная функция в разделяющемся уравнении; специальная лемма о Вронскиане; независимость ФСР; минимальный период; сведение устойчивости к нулевому решению. Вопрос 22, оставленный в тетради без ответа, раскрыт в главе 24; достаточность спектрального критерия, оборванная на IMG_2027, завершена в главе 28.

Уточнены область в теореме продолжения, потери ветвей при делении, кванторы зависимости и устойчивости, случай нулевого Вронскиана, знак в скалярной формуле Лиувилля, максимальная степень векторного резонанса. Практика по доске разобрана отдельно, включая оба варианта пробника, все начальные условия и таблицу производных.

Неясные мелкие символы на фотографиях не переписаны как якобы точная цитата. При восстановлении используются явно названная тема вопроса и математически выведенные формулы. Оригинальные снимки доступны в фотоальбоме; автоматическое распознавание не считается доказательством правильности формулы.

Содержание

Сверка с фотографиями: как связаны номера 1

Что изменено по существу . . . 2

1. ОДУ, порядок и решение 6

Доработка по фотографиям: вопрос 1 . . . 6

2. Геометрия ОДУ 7

Доработка по фотографиям: вопрос 2 . . . 7

3. Модели движения, распада и колебаний 8

Доработка по фотографиям: вопрос 3 . . . 8

4. Коши-Липшиц 9

Доработка по фотографиям: вопрос 4 . . . 9

5. Интегральная форма и Пикар 10

Доработка по фотографиям: вопрос 5 . . . 10

6. Пеано и непрерывность 11

Доработка по фотографиям: вопрос 6 . . . 11

7. Продолжение решений 12

Доработка по фотографиям: вопрос 7 . . . 12

8. Разделяющиеся переменные 13

Доработка по фотографиям: вопрос 8 . . . 13

9. Однородная правая часть и лучи 14

Доработка по фотографиям: вопрос 9 . . . 14

10. Нормальные и линейные системы 15

Доработка по фотографиям: вопрос 10 . . . 15

11. Зависимость вектор-функций и Вронскиан 16

Доработка по фотографиям: вопрос 11 . . . 16

12. ФСР и фундаментальная матрица **17**

Доработка по фотографиям: вопрос 12 17

13. Определитель и Лиувилль **18**

Доработка по фотографиям: вопрос 13 18

14. ЛНС и вариация постоянных **19**

Доработка по фотографиям: вопрос 14 19

15. Скалярное линейное уравнение как система **20**

Доработка по фотографиям: вопрос 15 20

16. Вариация постоянных для скалярного ЛНУ **21**

Доработка по фотографиям: вопрос 16 21

17. Простые характеристические корни **22**

Доработка по фотографиям: вопрос 17 22

18. Кратные корни и смещение **23**

Доработка по фотографиям: вопрос 18 23

19. Квазимногочлен и резонанс **24**

Доработка по фотографиям: вопрос 19 24

20. Интегральная формула Коши **25**

Доработка по фотографиям: вопрос 20 25

21. Постоянная матрица и жордановы цепочки **26**

Доработка по фотографиям: вопрос 21 26

22. Векторный квазимногочлен **27**

Доработка по фотографиям: вопрос 22 27

23. Автономная система и траектории **28**

Доработка по фотографиям: вопрос 23 28

24. Фазовые портреты линейной системы **29**

Доработка по фотографиям: вопрос 24 29

25. Устойчивость по определению **30**

Доработка по фотографиям: вопрос 25 30

26. Линейная устойчивость и спектр **31**

Доработка по фотографиям: вопрос 26 31

Практика по снимкам доски: самостоятельная №2 **32**

Что означают обозначения доски 32

Задача 1: второй вариант, как на доске 32

Задача 1: первый вариант и двойной резонанс 33

Задача 2: второй вариант, построение ядра по системе 33

Задача 2: первый вариант 34

Задача 3: второй вариант, все коэффициенты 34

Задача 3: первый вариант 35

Минимум производных, нужный прямо сейчас 35

1. ОДУ, порядок и решение

Доработка по фотографиям: вопрос 1

IMG_1948; главы 1.

Что требуется. Определения, разрешённая форма и примеры.

Решение задаётся вместе с интервалом: функция должна иметь нужные производные, её график должен лежать в области уравнения, а подстановка должна давать тождество. Порядок определяют по старшей действительно присутствующей производной, а не по степени функции.

На снимке есть $y' = \sin x/x$. Фраза «не решается» не должна означать отсутствие решения: при $x \neq 0$ имеем

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}\, ds.$$

Отсутствие элементарной первообразной не мешает существованию решения. Для исходной записи выбираем интервал без нуля; если отдельно определить правую часть в нуле равной 1, получим другую, продолженную постановку.

Проверка. $xy' - y = x^2$ при $x = 0$ нельзя механически делить на x. На $x > 0$ ответ $y = x^2 + Cx$; подстановка даёт $x(2x + C) - (x^2 + Cx) = x^2$.

2. Геометрия ОДУ

Доработка по фотографиям: вопрос 2

IMG_1949–IMG_1952; главы 2.

Что требуется. Поле и расширенное поле направлений, изоклины, особая точка, интегральная кривая и общий интеграл.

Для $y' = f(x, y)$ изоклина наклона k задаётся $f(x, y) = k$. Для дробной записи $y' = P/Q$ удобнее направление вектора (Q, P): там, где $Q = 0$, $P \neq 0$, оно вертикально. Общий нуль $P = Q = 0$ требует отдельного исследования; после сокращения общего множителя область исходного уравнения автоматически не расширяется.

Пример со снимка: $y' = -x/y$. Изоклины удовлетворяют $-x/y = k$, а интеграл равен $x^2 + y^2 = C$. В начале координат расширенное поле не определено, в остальных точках оно задано вектором $(y, -x)$. Окружность является целой интегральной кривой расширенного поля, но не графиком одной функции $y(x)$: графиковые ветви имеют вид $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ и исключают точки $y = 0$ исходной дроби.

Общее решение в явном виде и общий интеграл в неявном виде должны охватывать все локальные решения рассматриваемой области. После деления на выражение, которое может обратиться в нуль, отдельно возвращаем потерянные ветви.

3. Модели движения, распада и колебаний

Доработка по фотографиям: вопрос 3

IMG_1953; главы 3.

Что требуется. Смысл переменных, вывод уравнения и решение трёх моделей.

В тетради выбраны три модели. Для движения $S' = V(t)$ с известной непрерывной скоростью:

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^{t} V(s)\,ds.$$

Для разрушения клеток предположение «за малое время погибает доля, пропорциональная числу живых» даёт $N' = -\kappa N$, $\kappa > 0$, откуда $N = N_0 e^{-\kappa(t-t_0)}$. Постоянная имеет размерность обратного времени; отрицательный знак описывает убывание.

Для гармонического осциллятора $mx'' = -kx$, $m, k > 0$, поэтому $x'' + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{k/m}$ и

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Форма $A\cos(\omega t + \varphi)$ эквивалентна, но при $A = 0$ фаза не определяется. Начальные условия удобнее накладывать на форму с C_1, C_2.

4. Коши-Липшиц

Доработка по фотографиям: вопрос 4

IMG_1954–IMG_1957; главы 4.

Что требуется. Задача Коши; теорема; достаточные условия Липшица с доказательством; два разных контрпримера.

На прямоугольнике $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ непрерывность f даёт $M = \max|f|$. При условии Липшица по y с одной общей константой L решение задачи Коши существует и единственно на $|x - x_0| \le h$, где $h = \min(a, b/M)$; при $M = 0$ берём $h = a$.

Если f_y существует и $|f_y| \le L$ на прямоугольнике, теорема Лагранжа по переменной y даёт

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f_y(x, \eta)|\,|y_2 - y_1| \le L|y_2 - y_1|.$$

Непрерывность f_y на компакте — удобное достаточное условие её ограниченности. Обратное неверно: $f = |y|$ липшицева с $L = 1$, хотя производной в нуле нет.

Для отсутствия единственности используем другой пример: $y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$. И $y = 0$, и $y = x^3$ решают задачу. Можно также взять $y_a = 0$ при $x \le a$ и $(x - a)^3$ при $x > a$, $a \ge 0$. В точке склейки производная равна нулю. Отсутствие f_y само по себе ещё ничего не доказывает; нужны действительно разные решения.

5. Интегральная форма и Пикар

Доработка по фотографиям: вопрос 5

IMG_1958–IMG_1959; главы 5.

Что требуется. Доказать обе стороны эквивалентности; построить последовательные приближения.

Из $y' = f(x, y)$ и $y(x_0) = y_0$ интегрированием получаем $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$. Обратно: если y непрерывна и удовлетворяет этому равенству, непрерывность $f(s, y(s))$ позволяет продифференцировать интеграл; затем подстановка $x = x_0$ восстанавливает начальное условие.

Пикар заменяет неизвестное под интегралом предыдущим приближением:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \qquad y^{[m+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{[m]}(s))\, ds.$$

Квадратные скобки обозначают номер приближения, не производную. Для $y' = y$, $y(0) = 1$ получаем 1, $1 + x$, $1 + x + x^2/2$, затем $1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Предел — e^x.

На отрезке сжатия $Lh < 1$ для оператора T имеем $\|Tu - Tv\|_\infty \le Lh \|u - v\|_\infty$. Это объясняет сходимость, но ограничение $Lh < 1$ относится к данному доказательству: само решение может существовать намного дальше.

6. Пеано и непрерывность

Доработка по фотографиям: вопрос 6

IMG_1960; главы 6.

Что требуется. Формулировка без доказательства; непрерывность достаточна, но не необходима; при разрыве существование может нарушиться.

Теорема Пеано даёт локальное существование при непрерывной правой части, не обещая единственности. Три утверждения нельзя смешивать: непрерывность гарантирует существование; без неё общей гарантии нет; отдельное уравнение с разрывной правой частью всё же может иметь решение.

Для $y' = \operatorname{sgn} x$, $y(0) = 0$ непрерывный кандидат равен $|x|$, но его односторонние производные в нуле различны. Дифференцируемого решения на двустороннем интервале нет. Для начального значения 1 из тетради кандидат равен $1 + |x|$; вывод тот же.

Пример из тетради $y = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$, $y(0) = 0$, имеет $y'(0) = 0$ по определению, а вне нуля $y' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Производная разрывна. Если в определении решения требуется C^1, используем бесспорный пример $f(x, 0) = 0$, $f(x, y) = 1$ при $y \neq 0$: правая часть разрывна на оси, а $y = 0$ является гладким решением.

7. Продолжение решений

Доработка по фотографиям: вопрос 7

IMG_1961–IMG_1962; главы 8.

Что требуется. Определения; ограниченная и неограниченная области; корректная теорема о предельном поведении.

В тетради формулировка «либо продолжается вправо, либо имеет вертикальную асимптоту» записана слишком широко. Для произвольной области верно: график максимального решения покидает каждый компакт, лежащий внутри области определения. Остановка может быть вызвана границей области при конечном значении функции.

Контрпример к чрезмерной формулировке: $y' = 0$ в $D = \{(x, y) : x < 1\}$, $y(0) = 0$. Максимальное решение $y = 0$ имеет правый конец 1, но вертикальной асимптоты нет. Для полосы $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, если максимальный правый конец $\beta < b$ конечен, действительно $|y(x)| \to \infty$ при $x \to \beta-$.

На всей плоскости $y' = y^2$, $y(0) = 1$ даёт $y = 1/(1 - x)$ на $(-\infty, 1)$; это настоящий конечный взрыв. Для $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ получаем $1/(1 + x)$ на $(-1, \infty)$: вправо решение продолжается неограниченно. Интервал всегда связный и содержит начальную точку.

8. Разделяющиеся переменные

Доработка по фотографиям: вопрос 8

IMG_1963–IMG_1964; главы 9.

Что требуется. Доказать существование и единственность при ненулевом множителе; разобрать частные случаи и кривые.

Закроем пометку «дописать» на IMG_1964. Пусть $y' = f(x)g(y)$, f, g непрерывны, $g \neq 0$ на интервале J. Выберем первообразные $F' = f$, $G' = 1/g$. Тогда G' непрерывна и не обращается в нуль, значит G строго монотонна, имеет локальную дифференцируемую обратную и

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0)).$$

Формула определена для x достаточно близких к x_0, поскольку аргумент остаётся внутри $G(J)$. Дифференцирование даёт $G'(y)y' = f(x)$, то есть исходное уравнение, а при x_0 получается y_0. Любое другое решение обязано удовлетворять тому же интегральному тождеству и потому совпадает с этой функцией.

Если $g(y_*) = 0$, решение $y = y_*$ проверяется отдельно. Теорема выше в этой точке неприменима; при одной лишь непрерывности g единственность там может как быть, так и нарушаться.

9. Однородная правая часть и лучи

Доработка по фотографиям: вопрос 9

IMG_1965–IMG_1967; главы 10.

Что требуется. Замена; доказательство единственности вне инвариантных лучей; подобие интегральных кривых; инвариантный луч.

Для $y' = F(y/x)$, $x \neq 0$, вводим $u = y/x$: $y' = u + xu'$, поэтому $xu' = F(u) - u$. При $F(u) - u \neq 0$ это разделяющееся уравнение; единственность следует из предыдущего вопроса даже без дифференцируемости F.

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Корни $F(k) = k$ нельзя потерять при делении: $y = kx$ является решением на каждом допустимом полулуче $x > 0$ или $x < 0$. Через $x = 0$ исходная дробная постановка не проходит.

При положительной гомотетии $(x, y) \mapsto (cx, cy)$ отношение y/x не меняется, а $\ln|cx| = \ln|x| + \ln c$ меняет только константу. Поэтому семейство кривых сохраняется на той части области, куда действует гомотетия. Не следует объявлять одну кривую неизменной: в общем случае она переходит в другую кривую семейства.

10. Нормальные и линейные системы

Доработка по фотографиям: вопрос 10

IMG_1968–IMG_1971; главы 11, 12.

Что требуется. Нормальная система, решение и задача Коши; ЛОС/ЛНС; теорема для непрерывных коэффициентов.

Верхний индекс в записи тетради $x^1, \dots, x^n$ — номер координаты. Для $\dot{x} = F(t, x)$ задача Коши задаёт все координаты $x(t_0) = x_0$. Непрерывность F и локальная липшицевость по вектору дают локальное существование и единственность. Непрерывные частные производные по координатам — достаточное условие липшицевости на малом прямоугольнике.

Для $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ с непрерывными A, f решение существует на всём общем интервале их непрерывности. На каждом компактном отрезке $\|F(t,u) - F(t,v)\| \le \|A(t)\|\|u - v\|$, а линейный рост по x исключает конечный взрыв внутри этого интервала.

Переход от $y^{(n)} = H(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ к системе: $x_1 = y, \dots, x_n = y^{(n-1)}$. Первые $n-1$ уравнений $\dot{x}_j = x_{j+1}$, последнее $\dot{x}_n = H(t, x_1, \dots, x_n)$. Нужно задать ровно n начальных значений.

11. Зависимость вектор-функций и Вронскиан

Доработка по фотографиям: вопрос 11

IMG_1972–IMG_1974; главы 13.

Что требуется. Определения с кванторами; импликации; специальная лемма для решений одной ЛОС.

Линейная зависимость означает существование одного ненулевого набора постоянных c_j, для которого $\sum c_j x_j(t) = 0$ при всех t. Коэффициенты, выбранные заново в каждой точке, не являются такой зависимостью.

Для произвольных вектор-функций $W(t) \equiv 0$ не влечёт зависимости. Например, $x_1 = (1, t)^T$, $x_2 = (t, t^2)^T$: определитель нулевой всюду, но из $c_1 + c_2 t \equiv 0$ следуют $c_1 = c_2 = 0$.

Восстановим специальную лемму. Если все x_j решают одну ЛОС, из $W(t_0) = 0$ получаем ненулевые постоянные c_j с $z(t_0) = \sum c_j x_j(t_0) = 0$. Суперпозиция делает z решением той же ЛОС. Единственность задачи с нулевым начальным вектором даёт $z \equiv 0$. Здесь используются оба условия: одна и та же система и единственность.

12. ФСР и фундаментальная матрица

Доработка по фотографиям: вопрос 12

IMG_1975–IMG_1976; главы 14.

Что требуется. Теорема об общем решении; размерность; переход между фундаментальными матрицами.

Для системы размера n ФСР содержит ровно n независимых векторных решений. Если $X(t)$ составлена из них по столбцам, $\det X(t) \neq 0$ во всех точках интервала. Для любого решения u сначала решаем обычную систему $X(t_0)c = u(t_0)$. Единственность даёт $u(t) = X(t)c$ на всём интервале: коэффициенты постоянны.

Если Y — другая фундаментальная матрица, каждый её столбец есть постоянная комбинация столбцов X, поэтому $Y = XC$ с постоянной невырожденной C. Обратно, такое произведение даёт фундаментальную матрицу. При заданных X, Y матрица перехода единственна: $C = X(t_0)^{-1}Y(t_0)$.

Нормированная матрица $\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$ имеет $\Phi(t_0, t_0) = E$. Умножение справа и порядок множителей обязательны; $X(t_0)^{-1}X(t)$ в общем случае задаёт другую матрицу.

13. Определитель и Лиувилль

Доработка по фотографиям: вопрос 13

IMG_1977–IMG_1979; главы 15.

Что требуется. Общая формула производной определителя; доказательство при n=2; формула Лиувилля при n=2.

Для $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ имеем $W = uz - vw$ и

$$W' = u'z + uz' - v'w - vw'.$$

Если $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, подставляем $u' = au + bw$, $v' = av + bz$, $w' = cu + dw$, $z' = cv + dz$. После раскрытия взаимно уничтожаются члены с b, c, остаётся $W' = (a + d)W$.

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Не делим на W в доказательстве, пока не разобран нулевой случай. Уравнение $W' = \operatorname{tr} A \, W$ линейно, и его формула верна также при $W(t_0) = 0$. Следовательно, определитель либо нигде не нулевой, либо тождественно нулевой.

14. ЛНС и вариация постоянных

Доработка по фотографиям: вопрос 14

IMG_1980–IMG_1982; главы 16.

Что требуется. Доказать структуру общего решения; вывести вариацию постоянных для системы.

Фиксируем одно частное решение u_p уравнения $u' = A(t)u + f(t)$. Разность любого решения u и u_p удовлетворяет $z' = Az$, а сумма $u_p + z$ вновь решает ЛНС. Это обе стороны утверждения $u = u_p + u_h$.

Положим $u = X(t)c(t)$, $X' = AX$. Тогда

$$X'c + Xc' = AXc + f, \qquad Xc' = f, \qquad c' = X^{-1}f.$$

Интегрируем с фиксированным нижним пределом:

$$u(t) = X(t)\left[c_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds\right], \quad c_0 = X(t_0)^{-1}u_0.$$

Обратная матрица стоит слева от вектора f. В записи с неопределённым интегралом константа — постоянный вектор; нельзя дважды учитывать её и в интеграле, и ещё одним независимым набором.

15. Скалярное линейное уравнение как система

Доработка по фотографиям: вопрос 15

IMG_1983–IMG_1987; главы 17.

Что требуется. Переход, сохранение зависимости, общее решение, скалярный Вронскиан и формула Лиувилля.

Для нормированного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f$ матрица сопровождающей системы имеет единицы над диагональю и последнюю строку $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$. Её след равен $-a_{n-1}$, поэтому

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Если старший коэффициент $a_n \neq 1$, сначала делим все коэффициенты и f на a_n; в экспоненте оказывается $-\int a_{n-1}/a_n$.

Отображение $y \mapsto (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$ сохраняет зависимости: тождественную скалярную комбинацию дифференцируем, а из векторной комбинации берём первую координату. Специальная альтернатива для Вронскиана относится к полному набору из n решений уравнения порядка n. Для меньшего числа функций нельзя без оговорки использовать укороченный определитель как полный Вронскиан системы.

16. Вариация постоянных для скалярного ЛНУ

Доработка по фотографиям: вопрос 16

IMG_1988–IMG_1989; главы 18.

Что требуется. Вывести систему для производных коэффициентов и получить общее решение.

В тетради система записана без переходов. Для $n = 2$ положим $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ и наложим $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$. Тогда $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Ещё одно дифференцирование и подстановка в $y'' + py' + qy = f$ дают второе уравнение $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$.

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{W}, \quad W = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Для порядка n первые $n - 1$ строк имеют правую часть нуль, последняя — нормированную f. Матрица этой системы является полной матрицей Вронского, поэтому обратима. После интегрирования получаем n произвольных постоянных.

В пособии глава 18 также содержит восстановление уравнения по ФСР и понижение порядка. Эти дополнительные части на снимках данного вопроса не заявлены; сам метод вариации остаётся обязательной частью рукописного №16.

17. Простые характеристические корни

Доработка по фотографиям: вопрос 17

IMG_1990–IMG_1992; главы 19.

Что требуется. Определение многочлена; проверка экспонент; независимость и полнота.

Незавершённую проверку на IMG_1992 закрываем вычислением:

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0.$$

Это определитель Вандермонда после вынесения экспонент из столбцов. Каждая $e^{\lambda_j x}$ решает ЛОУ, поскольку $L(D)e^{\lambda_j x} = L(\lambda_j)e^{\lambda_j x} = 0$. Решений ровно n, значит это ФСР и их постоянные комбинации дают всё пространство решений.

Для вещественных коэффициентов комплексную пару $a \pm bi$, $b \neq 0$, заменяем вещественными функциями $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. У уравнения порядка n должно остаться n вещественных произвольных постоянных, а не по одной на комплексную пару.

18. Кратные корни и смещение

Доработка по фотографиям: вопрос 18

IMG_1993–IMG_1995; главы 20.

Что требуется. Доказать формулу смещения, построить решения для кратного корня, доказать независимость.

Из $D(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}(D+\lambda)v$ последовательным применением и линейностью получаем

$$L(D)(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}L(D+\lambda)v.$$

Если $L(z) = (z-\lambda)^k M(z)$, $M(\lambda) \neq 0$, то $L(D+\lambda) = M(D+\lambda)D^k$. Для $v = x^j$, $0 \leq j < k$, производная $D^k v = 0$, поэтому $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ являются решениями.

Независимость разных экспоненциальных блоков доказывается так: разделить предполагаемое тождество на одну экспоненту и продифференцировать столько раз, чтобы уничтожить её полиномиальный блок. На остальных блоках действует степень $D+\alpha$ с $\alpha \neq 0$; этот оператор обратим на многочленах ограниченной степени. Индукция по числу различных корней даёт нулевые полиномы во всех блоках. Общее число функций равно сумме кратностей, то есть порядку уравнения.

19. Квазимногочлен и резонанс

Доработка по фотографиям: вопрос 19

IMG_1996–IMG_1998; главы 21.

Что требуется. Определение, суперпозиция, теорема о частном решении с доказательством.

Для $L(D)y = e^{\mu x}P_N(x)$, $P_N \neq 0$, пусть s — кратность μ как корня L; при отсутствии корня $s = 0$. Ищем $y_p = e^{\mu x}x^s Q_N(x)$. После смещения и разложения $L(z) = (z-\mu)^s M(z)$ получаем

$$M(D+\mu)D^s(x^s Q_N) = P_N.$$

Оператор $Q \mapsto D^s(x^s Q)$ диагонален на мономах с ненулевыми коэффициентами $(s+j)!/j!$. Оператор $M(D+\mu)$ треугольен с диагональю $M(\mu) \neq 0$. Оба обратимы, поэтому выбранный Q_N существует и единственен. Сравнение старших коэффициентов даёт $q_N = p_N N!/[M(\mu)(N+s)!] \neq 0$.

Для вещественной тригонометрической правой части берём оба полинома:

$$x^s e^{\alpha x}(A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x).$$

Их отдельные фактические степени могут оказаться меньше N. Не пропускаем младшие степени и не называем найденные коэффициенты произвольными постоянными общего решения.

20. Интегральная формула Коши

Доработка по фотографиям: вопрос 20

IMG_1999–IMG_2001; главы 22.

Что требуется. Построить ядро и доказать формулу; незавершённый пример с тангенсом.

Среди файлов нет IMG_2000; IMG_1999 и IMG_2001 непосредственно продолжают одно доказательство. Для нормированного уравнения порядка n ядро $K(x,s)$ решает ЛОУ по x и имеет $K = K_x = \cdots = K_x^{(n-2)} = 0$, $K_x^{(n-1)} = 1$ при $x = s$. Последовательное дифференцирование $y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,s) f(s)\, ds$ до порядка n даёт граничный член $f(x)$ только на последнем шаге. Остаток интеграла уничтожается оператором L.

Дописанный пример тетради: $y'' + 4y = \tan x$. ФСР $\cos 2x, \sin 2x$; ядро

$$K(x,s) = \tfrac{1}{2}\sin 2(x-s), \qquad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin 2(x-s)\tan s\, ds.$$

x_0 и x должны лежать в одном интервале $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$. Вычислять интеграл для записи решения не требуется. При $n = 1$ единственное условие ядра — $K(s,s) = 1$; нулевого условия нет.

21. Постоянная матрица и жордановы цепочки

Доработка по фотографиям: вопрос 21

IMG_2002–IMG_2007; главы 23.

Что требуется. Собственные и присоединённые векторы; три случая; построение и доказательство ФСР.

Для цепочки $v_0, \dots, v_{k-1}$ правильные условия $(A-\lambda E)v_0 = 0$, $(A-\lambda E)v_j = v_{j-1}$. Соответствующие решения:

$$x_j(t) = e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{j}\frac{t^r}{r!}v_{j-r}, \quad 0 \le j < k.$$

При дифференцировании получаем $x_j' = \lambda x_j + x_{j-1}$ для $j \ge 1$, а применение A даёт ровно это выражение. Для $j = 0$ обе части равны λx_0. В момент нуль решения равны векторам цепочки; все цепочки вместе составляют жорданов базис, значит полученные n решений независимы.

Кратное собственное значение не обязательно требует степеней t: у $A = 2E$ два независимых собственных вектора и две клетки размера один. У $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ одна клетка: решения $e^{2t}(1,0)^T$ и $e^{2t}(t,1)^T$. Для невещественных цепочек вещественной матрицы берём действительные и мнимые части сопряжённых решений.

22. Векторный квазимногочлен

Доработка по фотографиям: вопрос 22

IMG_2008; главы 24.

Что требуется. Полное восстановление отсутствующего ответа: определения, степень, резонанс и доказательство.

На IMG_2008 после вопроса нет ответа. Векторный многочлен $P_N(t) = \sum p_j t^j$ имеет степень N, если $p_N \neq 0$; степень равна максимуму степеней координат. В системе $u' = Au + e^{\mu t} P_N$ положим $u = e^{\mu t} Q$, $B = \mu E - A$. Тогда $Q' + BQ = P_N$.

Если B обратима, ищем $Q = \sum_{j=0}^{N} q_j t^j$ и сравниваем коэффициенты:

$$Bq_j + (j+1)q_{j+1} = p_j, \quad q_{N+1} = 0.$$

Сначала $q_N = B^{-1} p_N$, затем $q_j = B^{-1}(p_j - (j+1)q_{j+1})$. Получаем единственный полином степени N.

При резонансе переходим к жордановым клеткам. В клетке размера k для $\lambda = \mu$ последовательно решаем $v_k' = r_k$, $v_{k-1}' = v_k + r_{k-1}$ и так далее. Каждый шаг интегрирования увеличивает верхнюю границу степени на единицу. Поэтому существует Q степени не выше $N + k_\mu$, где k_μ — размер самой длинной резонансной клетки. Равенство не обязательно.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = 0$. Для $P = (0,1)^T$ частное решение $(t^2/2, t)^T$, степень $2 = N + k_\mu$. Для $P = (1,0)^T$ подходит $(t, 0)^T$, степень только 1. Скалярный множитель t^s нельзя без доказательства одинаково навязывать всем координатам системы.

23. Автономная система и траектории

Доработка по фотографиям: вопрос 23

IMG_2009–IMG_2013; главы 25.

Что требуется. Определения; сдвиг времени, непересечение, повторное прохождение точки, период и цикл.

В автономной системе $u' = F(u)$ уравнение не содержит время явно. Поэтому $v(t) = u(t + c)$ — решение на сдвинутом интервале: $v' = F(u(t + c)) = F(v)$. Если $u(t_1) = v(t_2)$, выравниваем время сдвигом и используем единственность. Для максимальных орбит получаем совпадение целых образов; для произвольных участков — совпадение согласованных частей.

Если непостоянное решение повторно проходит одну точку, участок между двумя прохождениями можно периодически повторить. Значения и производные на стыках совпадают, поскольку производная равна одному и тому же F в повторённой точке. Так получаем глобальное периодическое решение.

Дополним обоснование минимального периода. В непостоянной орбите $F \neq 0$: иначе единственность заставила бы решение быть равновесием. Поэтому одна координата локально строго монотонна, и достаточно малых положительных периодов нет. Предел последовательности периодов снова является периодом по непрерывности. Следовательно, положительная нижняя грань периодов достигается; на одном минимальном периоде повторных точек нет. Неподвижная точка — равновесие, а не непостоянный цикл.

24. Фазовые портреты линейной системы

Доработка по фотографиям: вопрос 24

IMG_2014–IMG_2019; главы 26.

Что требуется. Классификация при det A ≠ 0; все случаи, примеры, исключительные направления и кривые.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ даёт $dy/dx = (cx + dy)/(ax + by)$ там, где знаменатель не нуль. При $\det A \neq 0$ начало — единственная особая точка. Вещественные корни разных знаков: седло; разные одного знака: узел; повторный ненулевой: звёздный узел при $A = \lambda E$ либо неправильный узел с клеткой размера два. Чисто мнимые корни дают центр, остальные невещественные — фокус.

Уточнение рисунков: для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$ ответ $y = Cx^2$ не включает ось $x = 0$, её добавляем отдельно. Каждая парабола распадается на две орбиты; равновесие между ними не проходится за конечное время. Для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = x + y$ получаем $y = x(\ln|x| + C)$ и отдельно вертикальные лучи.

Пример фокуса на снимке: $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -x + y$. В полярных координатах $\dot{r} = r$, $\dot{\theta} = -1$; значит $r = Ce^{-\theta}$ на развёрнутом угле. Это спирали по часовой стрелке, наружу при росте времени. Циклов нет. Для $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ имеем $r' = 0$: окружности и центр. Не переносим классификацию линейного центра на нелинейную систему без отдельного обоснования.

25. Устойчивость по определению

Доработка по фотографиям: вопрос 25

IMG_2020–IMG_2023; главы 27.

Что требуется. Кванторы, асимптотическая устойчивость, неустойчивость и примеры; дописать сведение к нулю.

Для фиксированного t_0 устойчивость φ означает: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что все решения с $\|u(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ существуют при всех $t \geq t_0$ и остаются на расстоянии меньше ε. При неавтономном уравнении δ может зависеть от t_0; равномерная устойчивость требует отдельного условия. В формуле неустойчивости на IMG_2021 сравнивать надо $u(t_1)$ с $\varphi(t_1)$, а не с $\varphi(t_0)$.

Дописанное сведение IMG_2023: положим $z = u - \varphi(t)$. Тогда

$$z' = F(t, z + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)) =: G(t, z), \quad G(t, 0) = 0.$$

Начальные отклонения и отклонения в каждый момент в точности равны z, поэтому устойчивость исходного решения эквивалентна устойчивости нуля новой системы.

Для $z' = az$ имеем $|z(t)| = |z_0| e^{a(t - t_0)}$. При $a \leq 0$ берём $\delta = \varepsilon$; при $a < 0$ есть также притяжение к нулю. При $a > 0$ фиксируем $\varepsilon_0 = 1$ и для любого δ выбираем $0 < z_0 < \min(\delta, 1)$: в момент $t = t_0 + a^{-1} \ln(1/z_0)$ отклонение равно 1, значит ноль неустойчив.

26. Линейная устойчивость и спектр

Доработка по фотографиям: вопрос 26

IMG_2024–IMG_2027; главы 28.

Что требуется. Сведение ЛНС к ЛОС; спектральный критерий; обязательно дописать достаточность, оборванную на фото.

Если φ решает $u' = A(t)u + f(t)$, разность $z = u - \varphi$ решает $z' = A(t)z$. Поэтому устойчивость каждого решения ЛНС равносильна устойчивости нулевого решения ЛОС. Нелинейный пример с одновременно устойчивым и неустойчивым равновесиями нельзя переносить на одну линейную систему.

Для постоянной A положим $s = t - t_0 \geq 0$ и запишем $z = e^{As}z_0$. В жордановой клетке $J = \lambda E + N$, $N^k = 0$:

$$e^{Js} = e^{\lambda s} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{s^r N^r}{r!}.$$

Если все $\operatorname{Re}\lambda < 0$, каждое слагаемое стремится к нулю и ограничено. После перехода обратно к исходному базису найдётся $M \geq 1$ с $\|e^{As}\| \leq M$. Выбираем $\delta = \varepsilon/M$: это устойчивость. Стремление матрицы к нулю даёт притяжение всех малых начальных отклонений, то есть асимптотическую устойчивость.

Если все вещественные части неположительны, а все клетки на мнимой оси имеют размер один, соответствующие экспоненты ограничены, отрицательные блоки затухают. Та же оценка с M доказывает устойчивость. При наличии собственного значения на мнимой оси притяжения всех отклонений нет.

Полный критерий: положительная вещественная часть даёт растущую экспоненту; клетка размера хотя бы два на мнимой оси даёт растущий полиномиальный множитель. В обоих случаях сколь угодно малые начальные данные вдоль растущей моды выходят из фиксированной окрестности. Для комплексных мод берём действительную или мнимую часть. Требование тетради — доказать достаточность; необходимость оставлена здесь как объяснение полного критерия.

Практика по снимкам доски: самостоятельная №2

Снимки IMG_1925–IMG_1943 показывают разбор второго пробного варианта. Повторные кадры сохранены в фотоальбоме. Условия ниже взяты из файла «samost2example.pdf»; в первой задаче второго варианта используем $7e^{2x}$, как напечатано на листе. Отдельное e^{12x} на ранней записи доски не подменяет условие пробника. Разбор здесь выполнен заново с проверкой подстановкой.

Что означают обозначения доски

$y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного уравнения; $y_{\text{ч.н.}}$ — одно частное решение неоднородного. Тогда $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Буквы C_j — произвольные постоянные общего решения. Буквы $A_j, B_j, \ldots$ в пробном частном решении определяются подстановкой; они не являются дополнительными произвольными постоянными.

Для блока $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x]$ берём $\mu = \alpha + i\beta$, $N = \max(m, n)$, s — кратность μ в характеристическом многочлене. Пробная форма:

$$x^s e^{\alpha x}\left[A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x\right].$$

Оба многочлена имеют все степени от нуля до N с пока неизвестными коэффициентами. Блоки с одинаковыми α, β предварительно объединяются. В задаче №1 коэффициенты можно не вычислять; вид ФСР и кратности нужно получить точно.

Задача 1: второй вариант, как на доске

$$y^{(4)} - 5y''' + 7y'' - 5y' + 6y = 7e^{2x} + x^2\cos 3x + xe^{-2x}\cos 3x \\ + (x^7 + 5)e^{-2x}\sin 7x + 3x^3 + 4e^{7x} + 3\cos x.$$

Даны корни $2, 3$. Деление многочлена на $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ даёт $\lambda^2 + 1$:

$$L(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 1).$$

Все корни $2, 3, i, -i$ простые. Поэтому

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Разберём каждое слагаемое отдельно.

1. $7e^{2x}$: $\mu = 2$, $N = 0$, $s = 1$, поэтому $y_1 = Axe^{2x}$.
2. $x^2\cos 3x$: $\mu = 3i$, $N = 2$, $s = 0$. Берём

$$y_2 = (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos 3x + (D_2x^2 + D_1x + D_0)\sin 3x.$$

Синуса справа нет, но в пробной форме он нужен из-за производных.

3. $xe^{-2x}\cos 3x$: $\mu = -2+3i$, $N=1$, $s=0$:

$$y_3 = e^{-2x}[(E_1x+E_0)\cos 3x + (F_1x+F_0)\sin 3x].$$

4. $(x^7+5)e^{-2x}\sin 7x$: $\mu = -2+7i$, $N=7$, $s=0$:

$$y_4 = e^{-2x}[G_7(x)\cos 7x + H_7(x)\sin 7x].$$

   G_7, H_7 — полные многочлены степени не выше семи с отдельными неизвестными коэффициентами; постоянное 5 уже учтено в этом блоке.

5. $3x^3$: $\mu = 0$, $N=3$, $s=0$, поэтому $y_5 = I_3x^3 + I_2x^2 + I_1x + I_0$.
6. $4e^{7x}$: $\mu = 7$, $N=0$, $s=0$, поэтому $y_6 = Je^{7x}$.
7. $3\cos x$: $\mu = i$, $N=0$, $s=1$, поэтому $y_7 = x(K\cos x + M\sin x)$.

Ответ: $y = y_{\text{о.о.}} + y_1 + \dots + y_7$. Только $C_1, \dots, C_4$ произвольны; все остальные коэффициенты однозначно определяются в выбранной пробной форме.

Задача 1: первый вариант и двойной резонанс

Здесь $L(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 6\lambda^2 + 14\lambda + 637$, даны два корня 7. Делим на $(\lambda-7)^2$:

$$L(\lambda) = (\lambda-7)^2(\lambda^2+4\lambda+13), \quad \lambda = 7 \text{ (кратность } 2), \ -2\pm 3i.$$

Проверка знака: комплексная пара имеет вещественную часть -2, поскольку $\lambda^2+4\lambda+13 = (\lambda+2)^2+9$. Поэтому

$$y_{\text{о.о.}} = e^{7x}(C_1+C_2x) + e^{-2x}(C_3\cos 3x + C_4\sin 3x).$$

В первом варианте справа нет отдельного $7e^{2x}$. Для остальных блоков изменения относительно предыдущего разбора таковы:

- $x^2\cos 3x$: $\mu = 3i$ не корень, $s=0$; остаются два полных многочлена степени два.
- $xe^{-2x}\cos 3x$: теперь $\mu = -2+3i$ — простой корень, $s=1$; берём $xe^{-2x}[(Ax+B)\cos 3x + (Dx+E)\sin 3x]$.
- $(x^7+5)e^{-2x}\sin 7x$: $s=0$, пара многочленов степени семь.
- $3x^3$: полный многочлен степени три.
- $4e^{7x}$: $s=2$, поэтому Ax^2e^{7x}.
- $3\cos x$: i не корень, поэтому $A\cos x + B\sin x$ без множителя x.

Нельзя переносить кратности из одного варианта в другой. Во всех случаях общее решение содержит четыре произвольные постоянные.

Задача 2: второй вариант, построение ядра по системе

Решаем $y''+2y'+2y = e^{\cos x}$. Корни $-1\pm i$, поэтому ФСР $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$. Ищем

$$K(x,s) = C_1(s)e^{-x}\cos x + C_2(s)e^{-x}\sin x.$$

Условия $K(s,s)=0$, $K_x(s,s)=1$ дают после умножения на e^s:

$$\begin{cases} C_1\cos s + C_2\sin s = 0, \\ C_1(-\cos s - \sin s) + C_2(\cos s - \sin s) = e^s. \end{cases}$$

Прибавим первую строку ко второй: $-C_1\sin s + C_2\cos s = e^s$. Матрица поворота обратима, и получаем $C_1 = -e^s\sin s$, $C_2 = e^s\cos s$. Следовательно,

$$K(x,s) = e^{s-x}[\sin x\cos s - \cos x\sin s] = e^{-(x-s)}\sin(x-s).$$

Полное решение:

$$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + \int_0^x e^{-(x-s)}\sin(x-s)e^{\cos s}\,ds.$$

Правая часть непрерывна на всей $\mathbb{R}$; нижний предел 0 допустим. Другой фиксированный предел меняет лишь однородную составляющую. Условия пробника не требуют вычислять интеграл.

Задача 2: первый вариант

Для $y'' - 4y' + 13y = e^{\sin x}$ корни $2 \pm 3i$. При $r = x - s$ ядро

$$K(x,s) = \frac{1}{3}e^{2r}\sin 3r.$$

Действительно, при $r=0$ оно равно нулю, а $K_x = e^{2r}(\cos 3r + \frac{2}{3}\sin 3r)$ равна единице. Функция решает однородное уравнение по x. Значит,

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{3}\int_0^x e^{2(x-s)}\sin 3(x-s)e^{\sin s}\,ds.$$

Эта комплексная пара $2 \pm 3i$ относится к задаче №2. В задаче №1 первого варианта пара другая: $-2 \pm 3i$. Знак определяется конкретным характеристическим многочленом.

Задача 3: второй вариант, все коэффициенты

$$y'' + 2y' + 2y = 3e^x + 4\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2/5.$$

Однородная часть $e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Для $3e^x$ берём Ae^x. Подстановка даёт $5A = 3$, поэтому $A = 3/5$.

Для $4\sin x$ берём $B\cos x + D\sin x$. Производные:

$$y_p' = -B\sin x + D\cos x, \qquad y_p'' = -B\cos x - D\sin x.$$

После подстановки получаем $(B+2D)\cos x + (D-2B)\sin x = 4\sin x$, откуда

$$B + 2D = 0, \quad D - 2B = 4; \qquad D = 4/5,\ B = -8/5.$$

Значит,

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \tfrac{3}{5}e^x - \tfrac{8}{5}\cos x + \tfrac{4}{5}\sin x.$$

Первое условие: $C_1 + 3/5 - 8/5 = 0$, поэтому $C_1 = 1$. Производная однородной части в нуле равна $-C_1 + C_2$, а производная частной — $3/5 + 4/5 = 7/5$. Второе условие даёт $-1 + C_2 + 7/5 = 2/5$, откуда $C_2 = 0$.

$$\boxed{y = e^{-x}\cos x + \tfrac{3}{5}e^x - \tfrac{8}{5}\cos x + \tfrac{4}{5}\sin x.}$$

Задача 3: первый вариант

$$y'' - 4y' + 13y = 3e^x + 4\sin x, \quad y(0) = -3/5, \quad y'(0) = 8/5.$$

Для экспоненты $L(1) = 10$, поэтому $y_{p,1} = 3e^x/10$. Для $y_{p,2} = B\cos x + D\sin x$ получаем

$$(12B - 4D)\cos x + (4B + 12D)\sin x = 4\sin x.$$

Первое уравнение даёт $D = 3B$; второе — $40B = 4$. Значит $B = 1/10$, $D = 3/10$.

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \tfrac{3}{10}e^x + \tfrac{1}{10}\cos x + \tfrac{3}{10}\sin x.$$

Из $y(0) = C_1 + 2/5 = -3/5$ имеем $C_1 = -1$. Производная в нуле: $2C_1 + 3C_2 + 3/5 = 8/5$, поэтому $C_2 = 1$.

$$\boxed{y = e^{2x}(-\cos 3x + \sin 3x) + \tfrac{3}{10}e^x + \tfrac{1}{10}\cos x + \tfrac{3}{10}\sin x.}$$

Оба ответа проверены в исходных уравнениях и по обоим начальным условиям. Если твой лист задания имеет другое условие, сначала меняется условие, затем повторяются эти шаги; готовый ответ между вариантами не переносится.

Минимум производных, нужный прямо сейчас

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \quad (e^{ax})' = ae^{ax},$$
$$(\sin ax)' = a\cos ax, \quad (\cos ax)' = -a\sin ax,$$
$$(\tan ax)' = a/\cos^2 ax, \quad (\cot ax)' = -a/\sin^2 ax,$$
$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x),$$
$$(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx),$$
$$(e^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx).$$

Производная $e^{\cos x}$ равна $-e^{\cos x}\sin x$, а $e^{\sin x}$ — $e^{\sin x}\cos x$. В интегральной формуле Коши правую часть оставляем под интегралом: дифференцировать tan или cot для самой записи решения не нужно. При проверке задач с разрывами сначала выбираем интервал непрерывности.