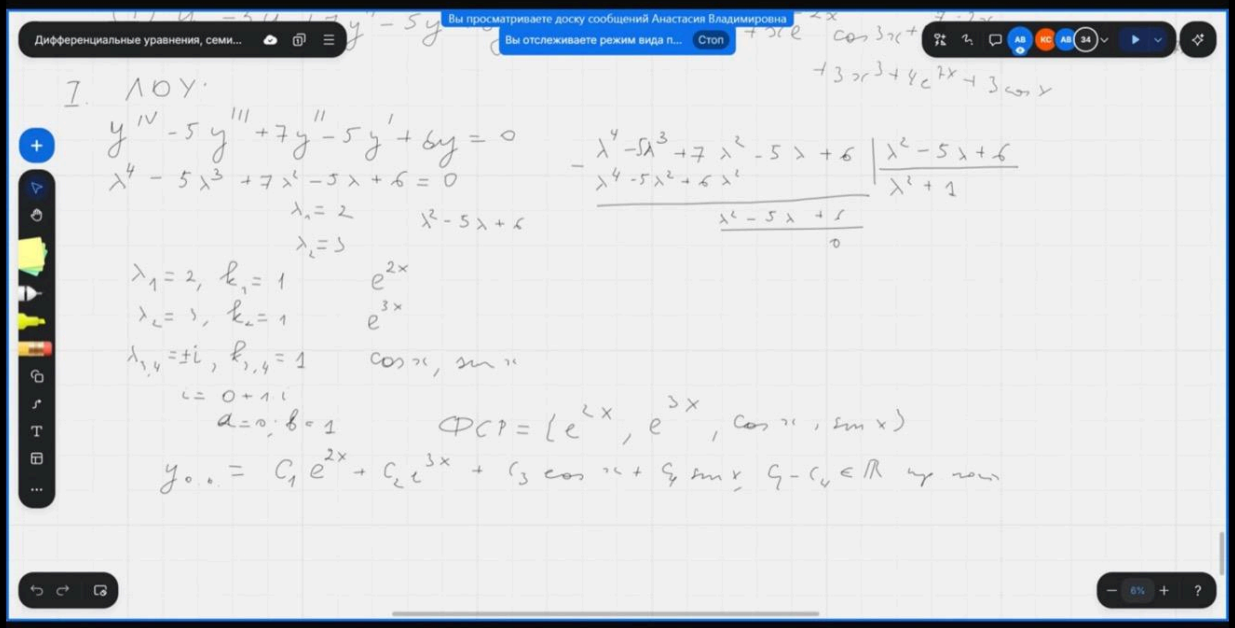
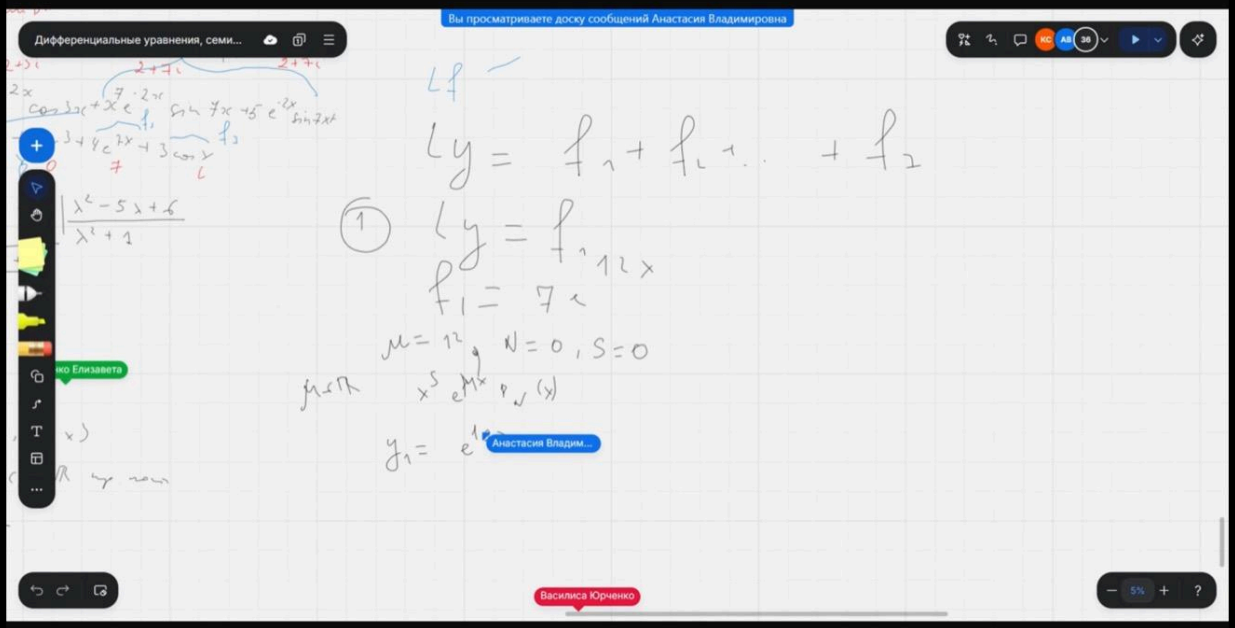
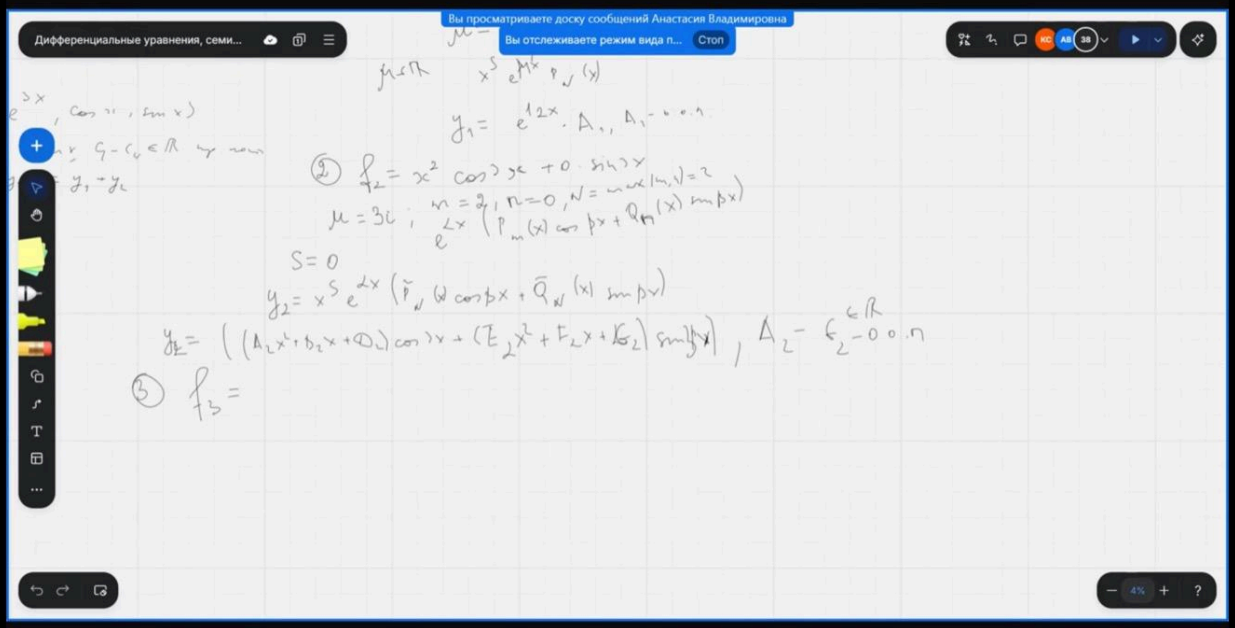
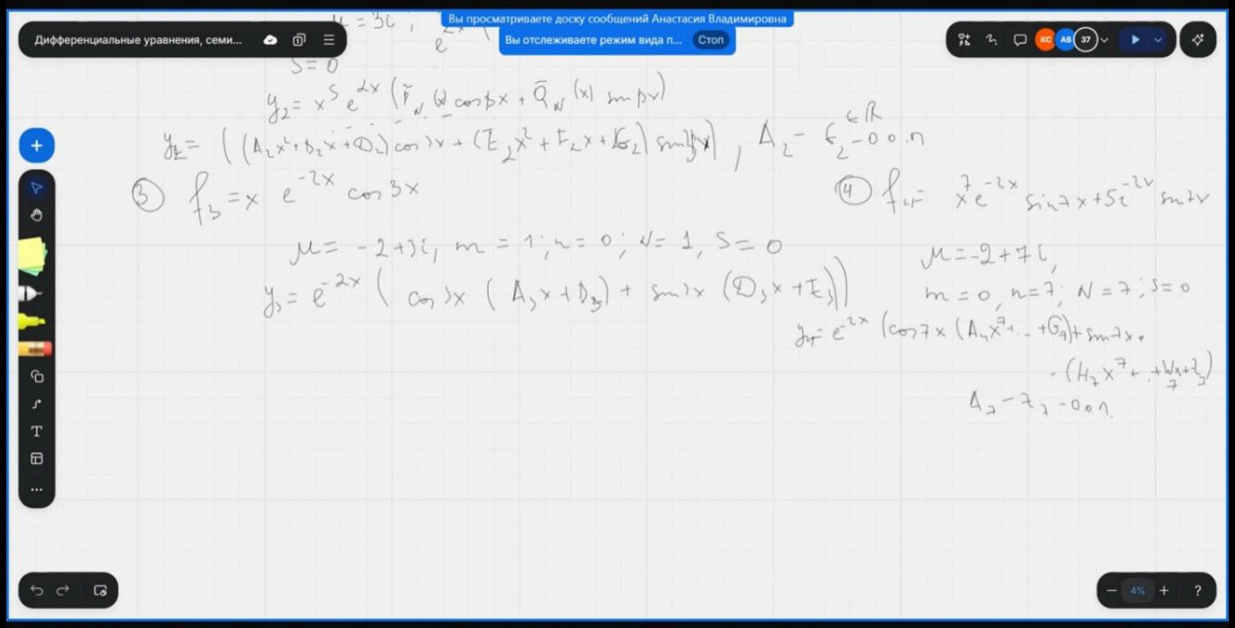
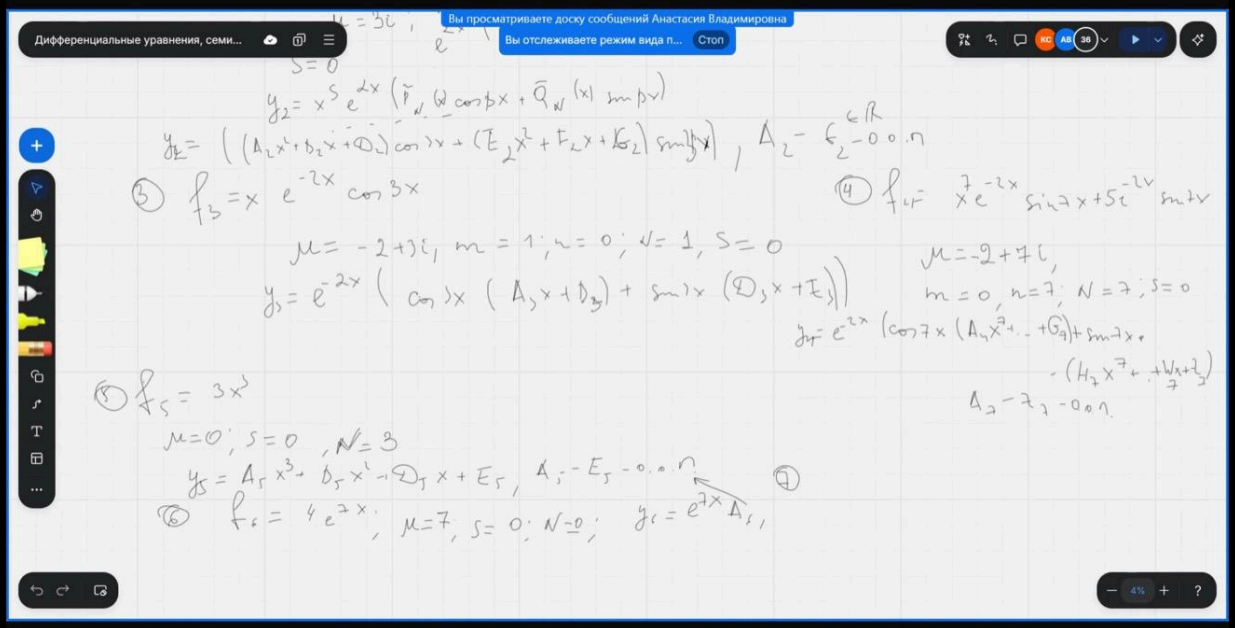
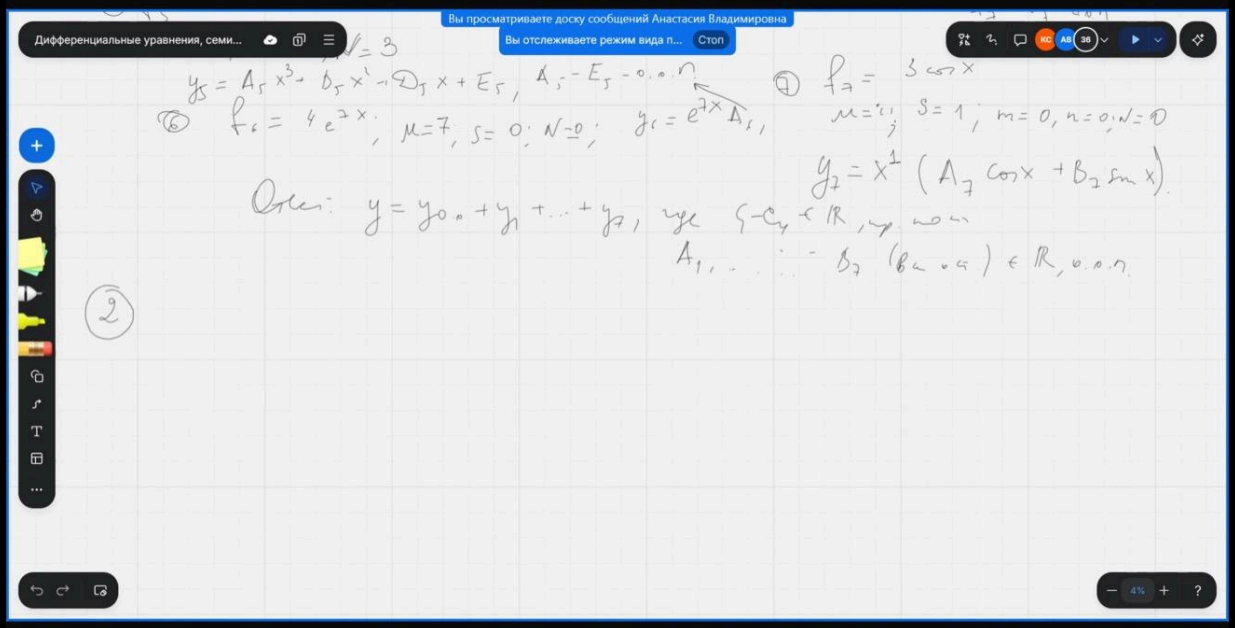

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
Стоп
1. ЛОУ.
$y^{IV} - 5y''' + 7y'' - 5y' + 6y = 0$
$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda^2 - 5\lambda + 6$
$\lambda_1 = 2,\ k_1 = 1$ e^{2x}
$\lambda_2 = 3,\ k_2 = 1$ e^{3x}
$\lambda_{3,4} = \pm i,\ k_{3,4} = 1$ $\cos x,\ \sin x$
$\alpha = 0,\ \beta = 1$
$\Phi СР = \{e^{2x}, e^{3x}, \cos x, \sin x\}$
$y_{о.н.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,\ C_1 - C_4 \in \mathbb{R}$
$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 5\lambda + 6 \mid \lambda^2 - 5\lambda + 6$
$\lambda^2 + 1$
$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2$
$\lambda^2 - 5\lambda + 6$
0
6%

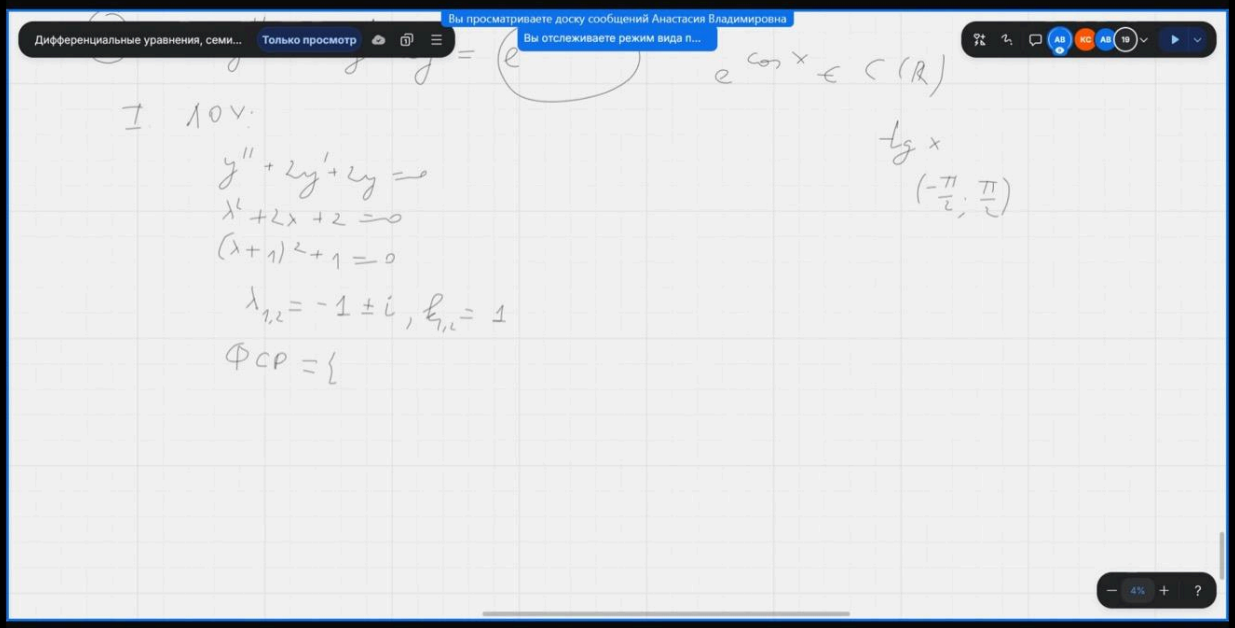

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Ly = f1 + f2 + ... + fn
(1) Ly = f
f1 = 7x
μ = 12, N = 0, S = 0
Анастасия Владим...
Василиса Юрченко

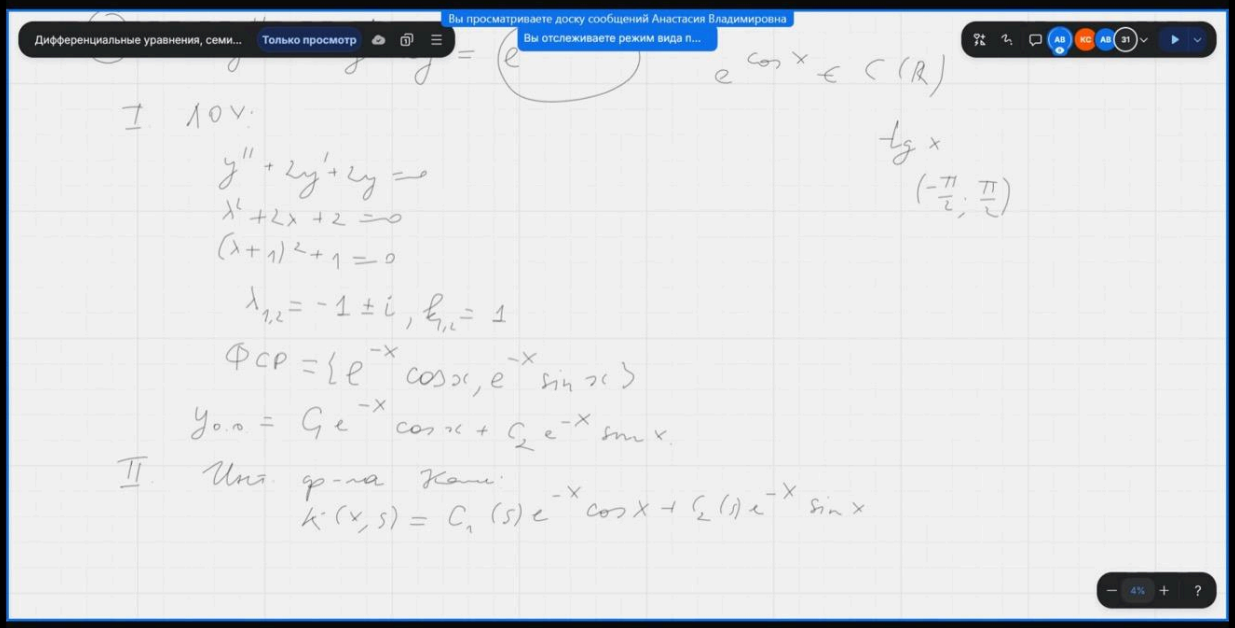

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
Стоп
$y_1 = e^{12x} \cdot A_1, A_1 - 0 \neq 0$
$\mu = 3i$; $m = 2, n = 0, N = \max(m,n) = 2$
$S = 0$
$y_2 = x^S e^{\alpha x} (\tilde{P}_N(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_N(x) \sin \beta x)$
$A_2 - 6_2 - 0 \neq 0$
$f_3 =$

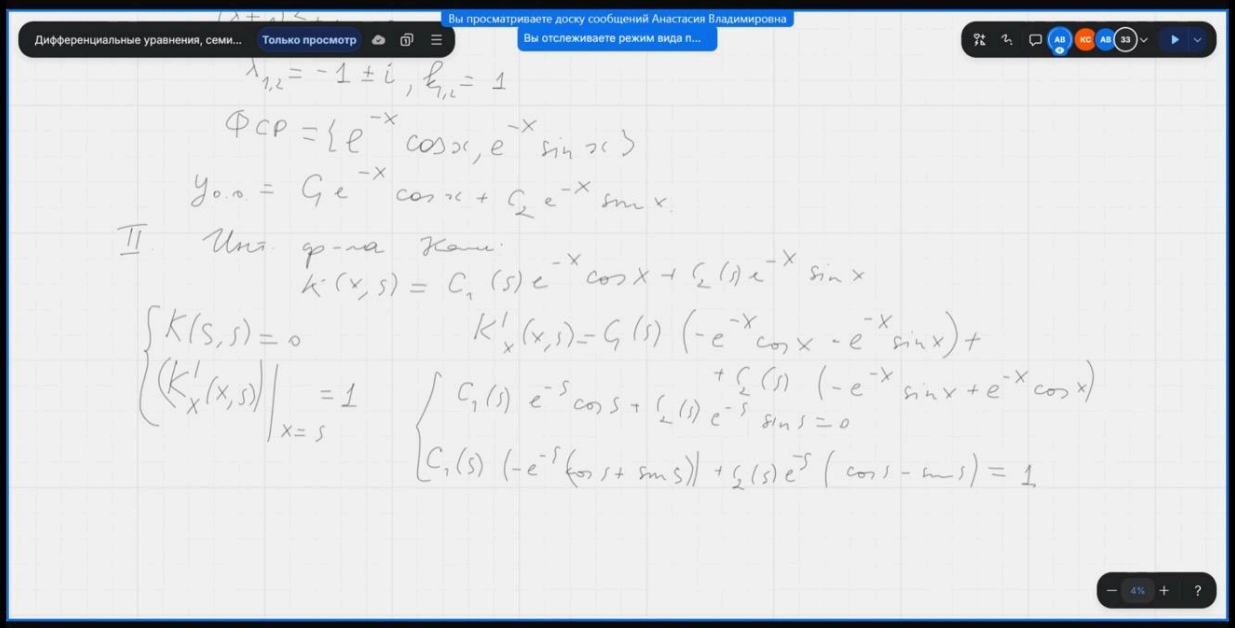

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
Стоп

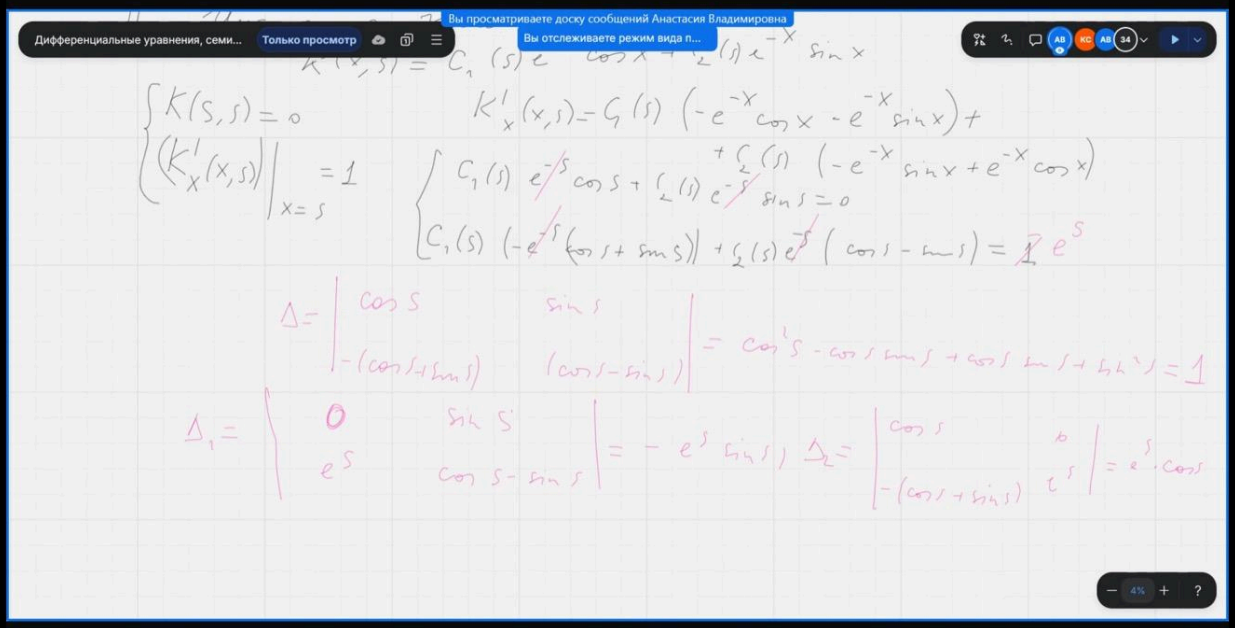

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
Стоп

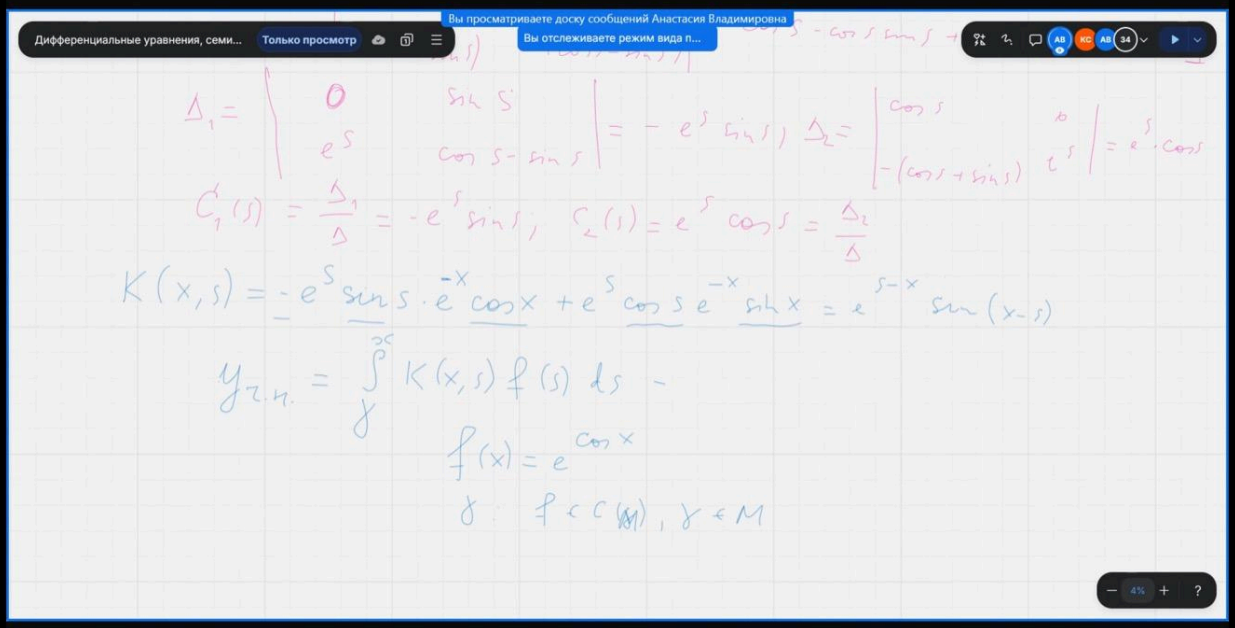

Дифференциальные уравнения, семи...
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
Стоп
Ответ: y = y_0.н. + y_1 + ... + y_7, где C_1 ∈ ℝ, ч.т.д.
A_1, ... B_7 (в.ч.д.) ∈ ℝ, о.о.р.

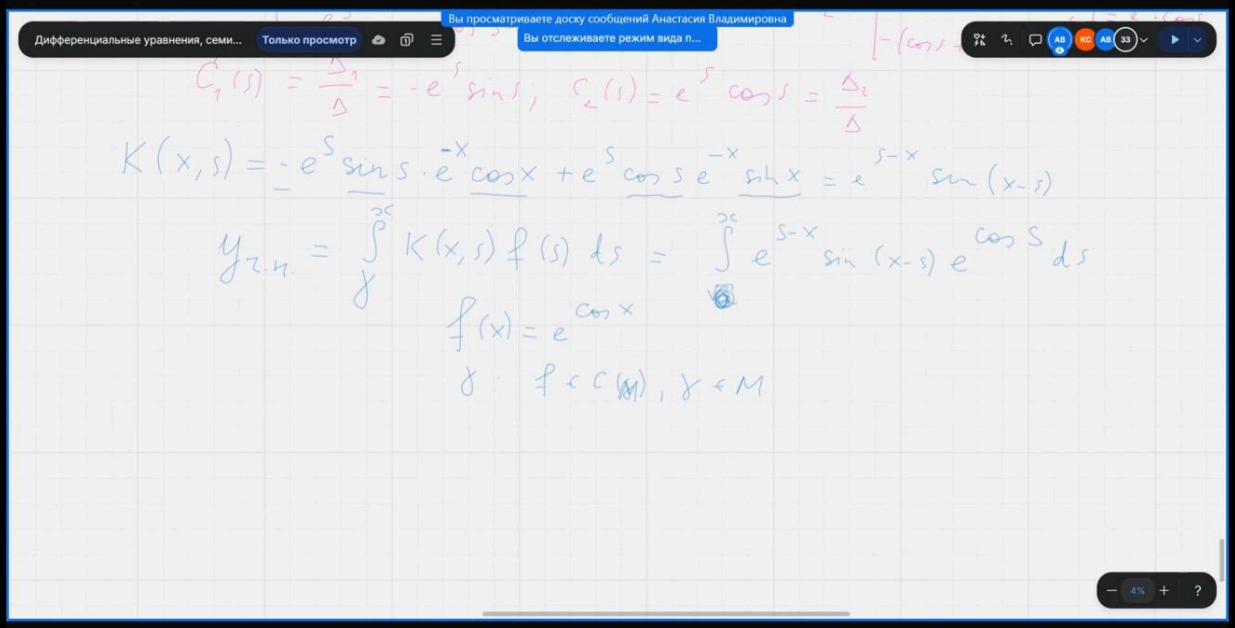

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$e^{\cos x} \in C(\mathbb{R})$
$\operatorname{tg} x$
$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
I. ЛОУ:
$y'' + 2y' + 2y = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
$(\lambda+1)^2 + 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \ell_{1,2} = 1$
ФСР = {
4%
?

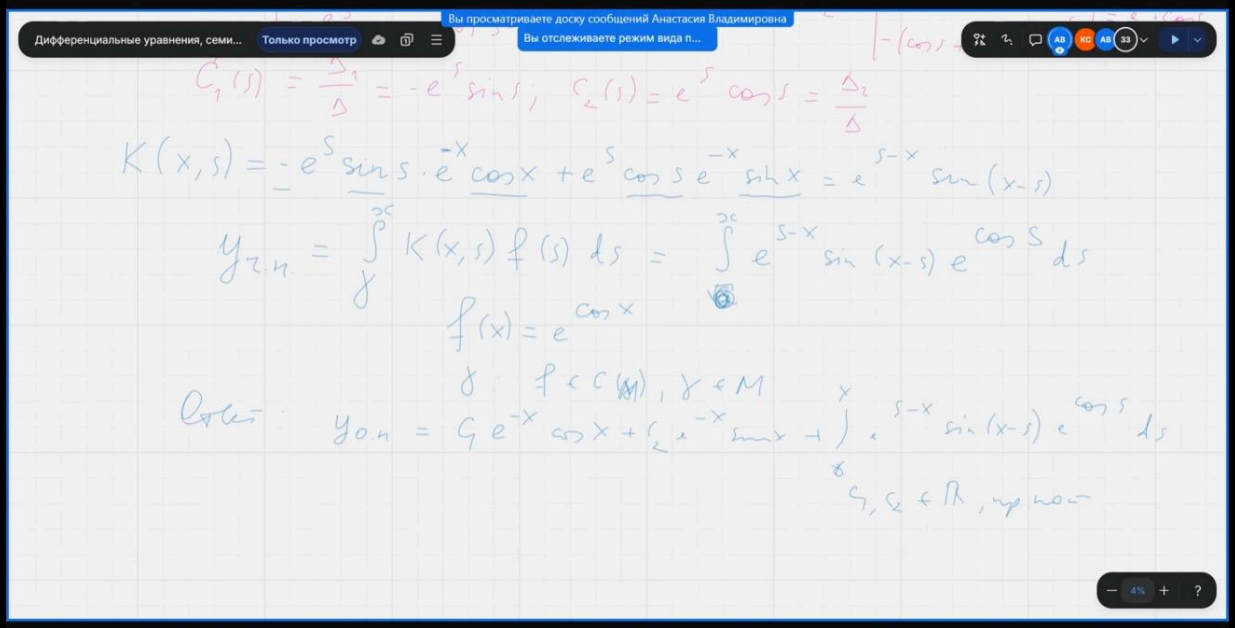

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$e^{\cos x} \in C(\mathbb{R})$
$\operatorname{tg} x$
$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
I ЛОУ:
$y'' + 2y' + 2y = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
$(\lambda+1)^2 + 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \ell_{1,2} = 1$
$\Phi_{СР} = \{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$
$y_{о.о} = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$
II Инт. ф-ла Коши:
$K(x,s) = C_1(s)e^{-x}\cos x + C_2(s)e^{-x}\sin x$
4%
?

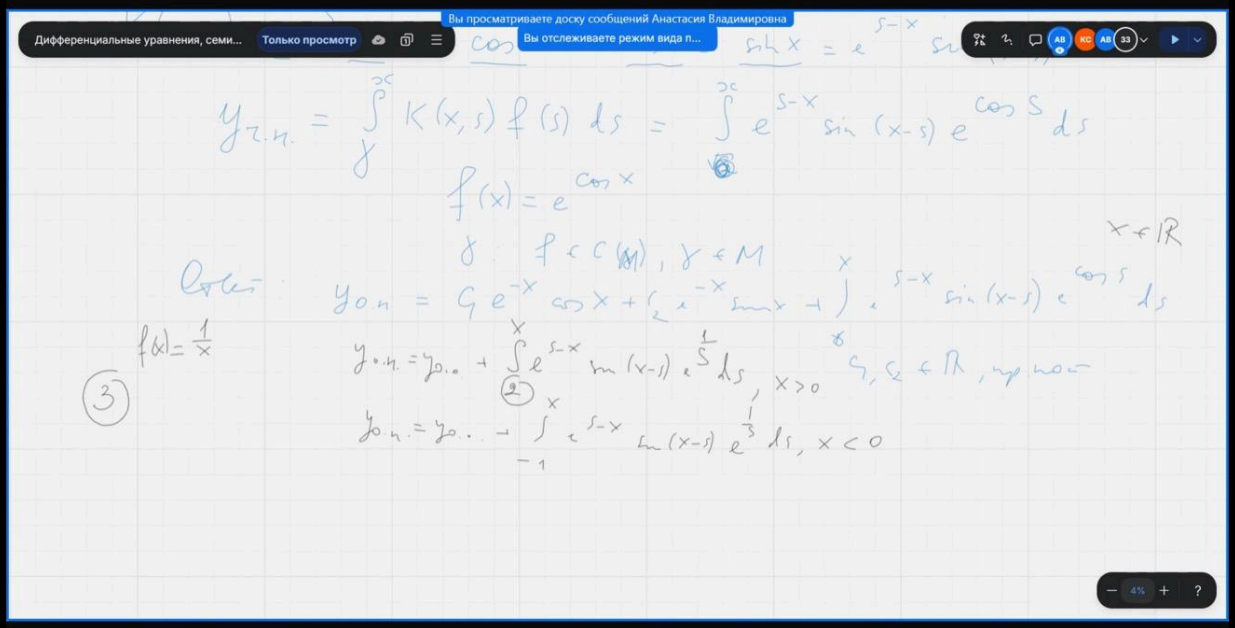

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, $k_{1,2} = 1$
$\Phi CP = \{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$
$y_{o.o} = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$
II Ин-ла Коши
$K(x,s) = C_1(s)e^{-x}\cos x + C_2(s)e^{-x}\sin x$
$\begin{cases} K(s,s) = 0 \\ (K'_x(x,s))\big|_{x=s} = 1 \end{cases}$
$K'_x(x,s) = C_1(s)\left(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x\right) + C_2(s)\left(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right)$
$\begin{cases} C_1(s)e^{-s}\cos s + C_2(s)e^{-s}\sin s = 0 \\ C_1(s)\left(-e^{-s}(\cos s + \sin s)\right) + C_2(s)e^{-s}(\cos s - \sin s) = 1 \end{cases}$
4%

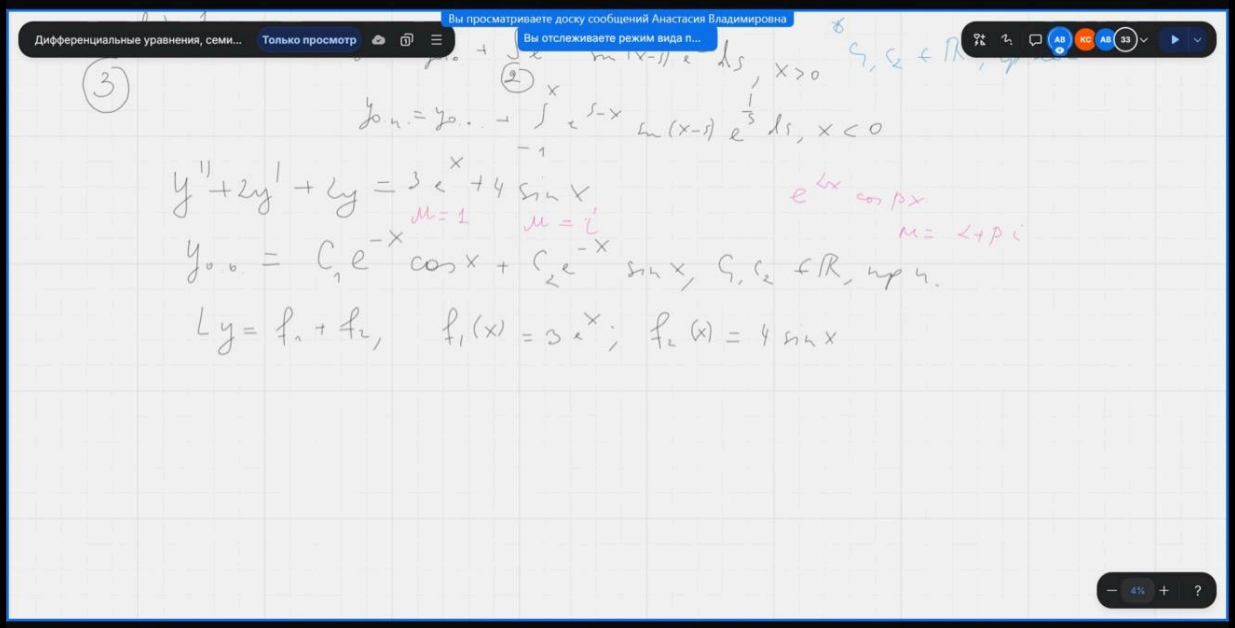

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$K(s,s)=0$
$\left(K'_x(x,s)\right|_{x=s}=1$
$K'_x(x,s)=C_1(s)\left(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\right)+$
$+C_2(s)\left(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)$
$C_1(s)\,e^{-s}\cos s+C_2(s)\,e^{-s}\sin s=0$
$C_1(s)\left(-e^{-s}(\cos s+\sin s)\right)+C_2(s)\,e^{-s}(\cos s-\sin s)=1\cdot e^{s}$
$\Delta=\begin{vmatrix}\cos s & \sin s\\ -(\cos s+\sin s) & (\cos s-\sin s)\end{vmatrix}=\cos^2 s-\cos s\sin s+\cos s\sin s+\sin^2 s=1$
$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin s\\ e^{s} & \cos s-\sin s\end{vmatrix}=-e^{s}\sin s$
$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos s & 0\\ -(\cos s+\sin s) & e^{s}\end{vmatrix}=e^{s}\cos s$
4%
?

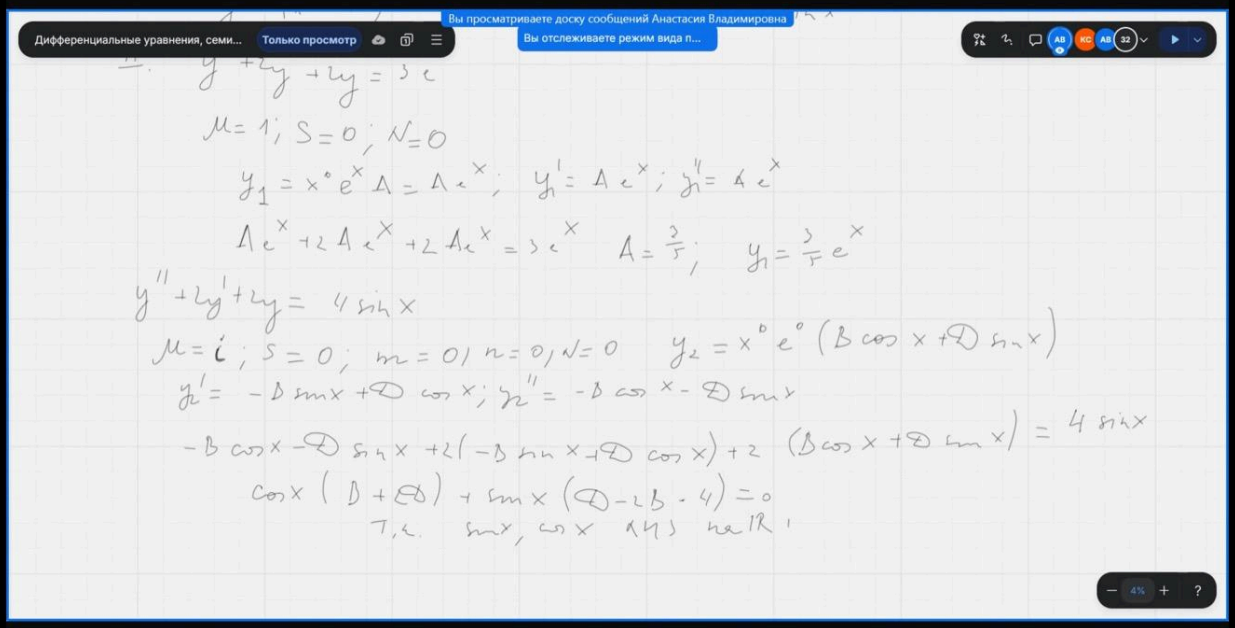

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin s \\ e^s & \cos s - \sin s \end{vmatrix} = -e^s \sin s$
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos s & 0 \\ -(\cos s + \sin s) & e^s \end{vmatrix} = e^s \cdot \cos s$
$C_1'(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -e^s \sin s$; $C_2'(s) = e^s \cos s = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
$K(x,s) = -e^s \sin s \cdot e^{-x} \cos x + e^s \cos s \, e^{-x} \sin x = e^{s-x} \sin(x-s)$
$y_{z.n.} = \int_\gamma^\infty K(x,s) f(s)\, ds$
$f(x) = e^{\cos x}$
γ: $f \in C(M)$, $\gamma \in M$
4%
?

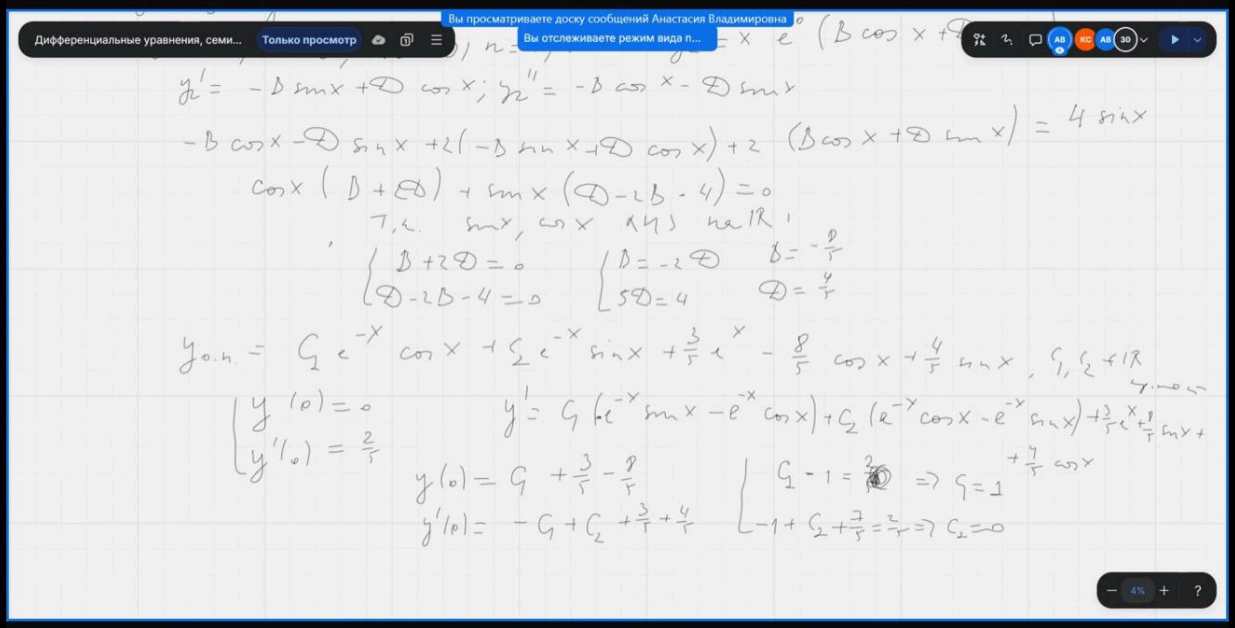

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$C_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -e^s \sin s$, $C_2(s) = e^s \cos s = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
$K(x,s) = -e^s \sin s \cdot e^{-x} \cos x + e^s \cos s \, e^{-x} \sin x = e^{s-x} \sin(x-s)$
$y_{z.n.} = \int_\gamma^{x} K(x,s) f(s)\, ds = \int_0^{x} e^{s-x} \sin(x-s)\, e^{\cos s}\, ds$
$f(x) = e^{\cos x}$
γ $f \in C(M)$, $\gamma \in M$
4%
?

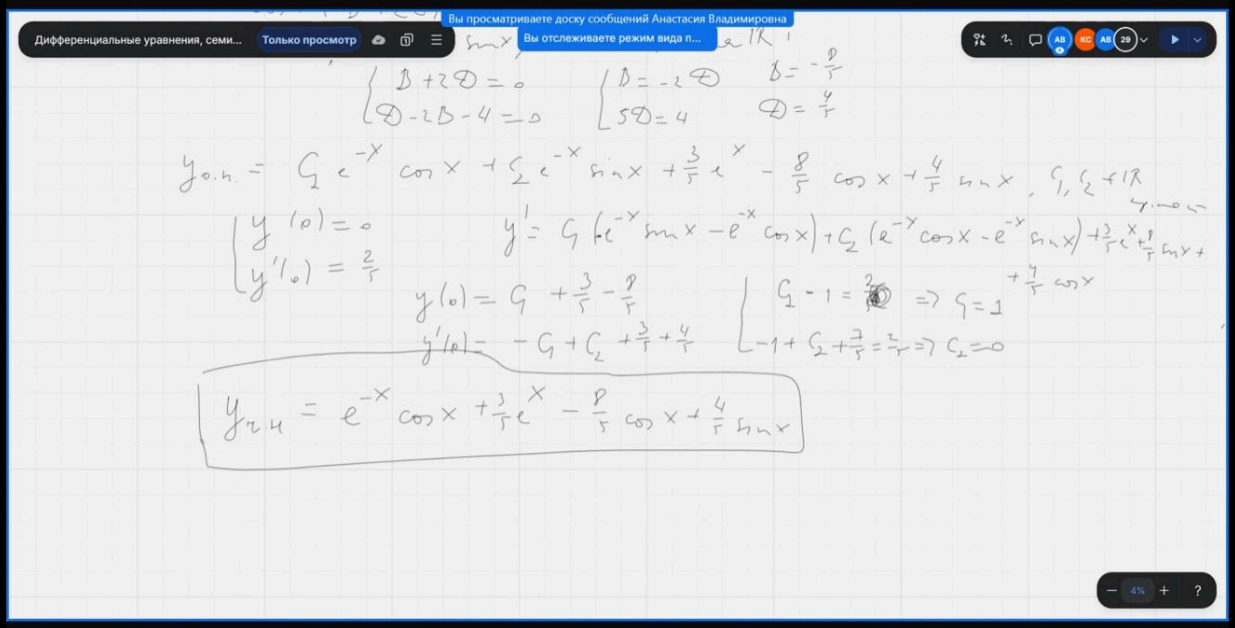

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$C_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -e^s \sin s$, $C_2(s) = e^s \cos s = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
$K(x,s) = -e^s \sin s \cdot e^{-x} \cos x + e^s \cos s \, e^{-x} \sin x = e^{s-x} \sin(x-s)$
$y_{z.n.} = \int_\gamma^x K(x,s) f(s)\, ds = \int_0^x e^{s-x} \sin(x-s)\, e^{\cos s}\, ds$
$f(x) = e^{\cos x}$
$\gamma \quad f \in C(M)$, $\gamma \in M$
Ответ: $y_{o.n.} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \int_\gamma^x e^{s-x} \sin(x-s)\, e^{\cos s}\, ds$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, при чем
4%
?

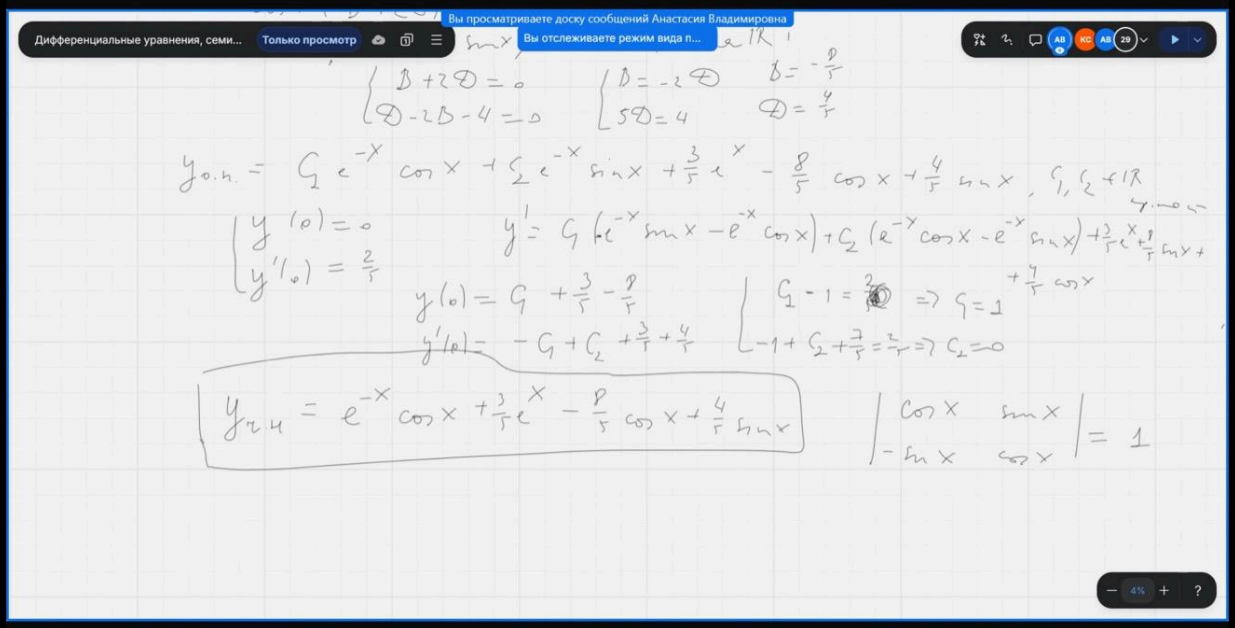

Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$y_{z.n.} = \int_{\gamma}^{x} K(x,s) f(s)\, ds = \int e^{s-x} \sin(x-s)\, e^{\cos s}\, ds$
$f(x) = e^{\cos x}$
γ $f \in C(M)$, $\gamma \in M$
$x \in \mathbb{R}$
$y_{o.n} = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + \int e^{s-x}\sin(x-s)\, e^{\cos s}\, ds$
$f(x) = \frac{1}{x}$
(3)
$y_{o.n.} = y_{o.o} + \int_{0}^{x} e^{s-x}\sin(x-1)\, e^{\frac{1}{s}}\, ds, \quad x > 0$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, произв
$y_{o.n.} = y_{o.o} + \int_{-1}^{x} e^{s-x}\sin(x-1)\, e^{\frac{1}{s}}\, ds, \quad x < 0$
4%
?


Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
3
2
$y_{о.н.} = y_{о.о.} + \int_{-1}^{x} e^{s-x} \ln(x-1)\, e^{\frac{1}{3}} ds,\ x > 0$
$y_{о.н.} = y_{о.о.} + \int_{-1}^{x} e^{s-x} \ln(x-1)\, e^{\frac{1}{3}} ds,\ x < 0$
$y'' + 2y' + 4y = 3e^{x} + 4\sin x$
$e^{\alpha x}\cos\beta x$
$\mu = 1$
$\mu = i$
$\mu = \alpha + \beta i$
$y_{о.о.} = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, мр ч.
$Ly = f_1 + f_2,\quad f_1(x) = 3e^{x};\quad f_2(x) = 4\sin x$
4%
?


Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...
$y'' + 2y' + 2y = 3e^x$
$\mu = 1;\ S = 0;\ N = 0$
$y_1 = x^0 e^x A = A e^x;\ y_1' = A e^x;\ y_1'' = A e^x$
$A e^x + 2A e^x + 2A e^x = 3e^x \quad A = \frac{3}{5};\ y_1 = \frac{3}{5} e^x$
$y'' + 2y' + 2y = 4\sin x$
$\mu = i;\ S = 0;\ m = 0,\ n = 0,\ N = 0 \quad y_2 = x^0 e^0 (B\cos x + D\sin x)$
$y_2' = -B\sin x + D\cos x;\ y_2'' = -B\cos x - D\sin x$
$-B\cos x - D\sin x + 2(-B\sin x + D\cos x) + 2(B\cos x + D\sin x) = 4\sin x$
$\cos x (B + 2D) + \sin x (D - 2B - 4) = 0$
т.к. $\sin x, \cos x$ лин. нез. на $\mathbb{R}$!
4%


Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...


Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...


Дифференциальные уравнения, семи...
Только просмотр
Вы просматриваете доску сообщений Анастасия Владимировна
Вы отслеживаете режим вида п...

1.1.

Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), порядка уравнения, решения ОДУ, разрешенного относительно старшей производной. Приведите примеры.

Опр. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка n называется выражение

(*) $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, связывающее значения независимой переменной x и зависимой переменной $y = y(x)$ и её производных $y', \dots, y^{(n)}$ до порядка n включительно.

Максимальный порядок производной, входящий в ур-ние, называется порядком уравнения (ОДУ)

Опр. Решением ОДУ (*) на множестве M называется ф-ция $y = f(x)$, имеющая на мн-ве M производные $f', f'', \dots, f^{(n)}$ до порядка n включительно и обращающая при подстановке соотн. (*) в тождество на мн-ве M, т.е. $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ $\forall x \in M$

Опр. ОДУ n-ого порядка, разрешённого относительно старшей производной, называется выражение

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Примеры:

$y' = \frac{\ln x}{x}$ - ОДУ I-ого порядка ✗ не решается

$y' = f(x)$

$xy' - y = x^2$ - ОДУ I-ого порядка

$y'' = 6y^2 + x$ (ур-ние Пенлеве (первое))

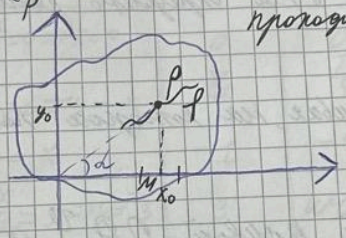
$y'' = 6x^2 + y$ - разреш. отн. старш. произв. II-порядка

№2

Дайте определение геометрической интерпретации ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной (дайте определение поля направлений, изоклины, изолированной особой точки, интегральной кривой, интеграла, общего решения и общего интеграла ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной). Приведите примеры.

$y' = f(x,y)$, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ (1), в т.ч. задана известная ф-ция $f(x,y)$, определена на мн-ве G (на мн-ве M)

$\exists (x_0, y_0) = P \in G$ и $\varphi(x)$ – решение ур-ния (1), проходящая через т. P



$y_0 = \varphi(x_0)$

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

$\varphi'(x) = f(x_0, \varphi(x_0))$ (2)

(2) $f(x_0, y_0)$

α – угол наклона кас. к реш $\varphi(x)$ в т. P отн. оси Ox

$tg\,\alpha = \varphi'(x_0) \Rightarrow$

$tg\,\alpha = f(x_0, y_0)$

Таким образом в $\forall$ т. определено значение tg угла наклона касательной к решению.

Опр Мн-во отрезков касательных к решению называется полем направлений ур-ния (1) на мн-ве M.



Т-м „перевернутое" уравнение

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ (1')

п.ч. ур-ния (1) определена на мн-ве $\tilde{G}$. Аналогично определяется $\tilde{f}$ угла наклона кас. к решения отрезок Δy, там где не было определено поле направлений для ур-ния (1)

$\tilde{G} = G \cup G'$, в $\tilde{G}$ определено расширенное поле направлений (либо для $y = \varphi(x)$ и ур (1)
для $x = \psi(y)$ и ур (1'))

Опр. Изолированной особой точкой ур-ния (1) называется т. (x_0, y_0):
1) в ней не определено расширенное поле направлений
2) $\exists \dot{O}_\delta(x_0, y_0)$: в ней определено расширенное поле направлений

Опр. Изоклина - кривая, на которой поле направлений постоянно.

Опр. Интегральной кривой ОДУ (1) называется кривая, которая, направление касательной в каждой точке определено расширенным полем направлений.

Опр. Ур-ние $\Phi(x, y) = 0$ некоторой интегральной кривой ур-ние (1) называется интегралом ур-ния.

Пример
$y' = \frac{(y-1)^2}{(x-2)^2}$ $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 2\}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{(x-2)^2}{(y-1)^2}$ $G' = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 1\}$

$\tilde{G} = G \cup G' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 1)\}$

↖ изолир. особая точка

Пример 1
$y' = -\frac{x}{y}$

$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$

$G' = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$

$\tilde{G} = G \cup G' = \mathbb{R}^2 \setminus$

$(0, 0)$ - особая изол

$k = y'$	$f(x,y) = k$ изоклина
0	$\frac{-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$
1	$\frac{-x}{y} = 1 \Rightarrow y =$
-1	$y = x$
3	$\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow y =$
0 для перев.	$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ $y = 0$



интегра

Пример 1

$y' = \frac{-x}{y}$

$y' = \frac{-x}{y}$ – ур-ние с разд. перем.

$y' = f(x)\,g(y)$

$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$

$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$

$\tilde{G} = G \cup G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(0, 0) – особая изолированная точка

Стационарное решение

1) $y = C$

2) $x = C$ $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow$

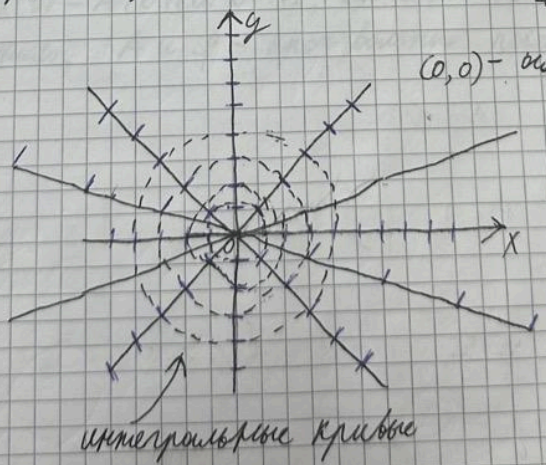
$\Rightarrow x\,dx = -y\,dy$

$\frac{x^2}{2} + C = \frac{-y^2}{2}$

$x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2$

$R \neq 0$

$k = y'$	$f(x,y) = k$ изоклина	$tg\,\alpha$	α	$\angle$
0	$\frac{-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$	0	0	
1	$\frac{-x}{y} = 1 \Rightarrow y = -x$	1	$\frac{\pi}{4}$	
-1	$y = x$	-1	$-\frac{\pi}{4}$	
3	$\frac{-x}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{-x}{3}$	3	arctg 3	
0 для перев.	$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$ $y = 0$	∞	$\frac{\pi}{2}$	



(0,0) – особая точка центр

интегральные кривые

Опр. Однопараметрическое семейство решений $y = \varphi(x, C)$, $C \in E$ ($E \subset \mathbb{R}$, мн-во) называется общим решением ОДУ (1), если

1) $\forall C_0 \in E$ $y = \varphi(x, C_0)$ - решение ур-ния (1);

2) $\forall$ решения $\tilde{\varphi}(x)$ в обл. G $\exists \tilde{C} \in E$: $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, \tilde{C})$

Опр. Соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ ($C \in E$) называется общим интегралом ур-ния (1) в обл. G, если

1) $\forall C_0 \in E$ $\exists \Phi(x, y, C_0) = 0$ интегральная ур-ния (1) в обл. G

2) $\forall$ интеграла $\tilde{\Phi}$ ур-ния (1) в обл. G $\exists \tilde{C} \in E$: $\tilde{\Phi}(x, y) = \Phi(x, y, \tilde{C})$

№3.

Приведите примеры к дифференциальным уравнениям.

закон движения

1) $\frac{d S(t)}{dt} = V(t)$

$\Rightarrow S(t) = \int V$

постоянная

2) Исследование под действием

$\frac{dN(t)}{dt} =$

$N(t)$ – коли

$\mathbb{R}$ – постоянн

клетка в ср

3) Гармониче

$x(t) = A$

число, A

13.
Приведите примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Найти полученные уравнения.

Закон движения

1) $\frac{dS(t)}{dt} = V(t)$, где $V(t)$ - непрерывная ф-ция $t \geq 0$

$\Rightarrow$ $S(t) = \int_0^t V(\tau)\,d\tau + C$, где C - произвольная постоянная

2) Исследования разрушения биологических клеток под действием ультразвука высокой интенсивности

$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$, где t - время,

$N(t)$ - концентрация живых клеток,

λ - постоянная, определяющая вероятность разрыва клетки в ед. времени. $N(t) = Ce^{-\lambda t}$

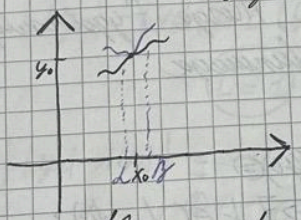
3) Гармонические колебания

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega > 0$ - некоторое заданное число, A и φ - произвольные постоянные

14.
Дайте определение задачи Коши ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Сформулируйте теорему Коши - Липшица. Приведите (с обоснованием) условия на функцию $f(x,y)$, из которых следует, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица. Покажите, что условие Липшица слабее рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ не существует.

Опр $\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$ Система из ДУ (1) и начального условия (2) называется

↖ нач. условия задачей Коши ДУ (1)

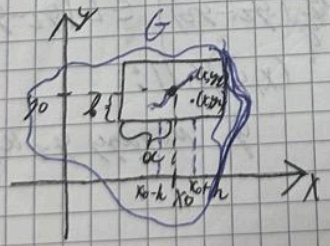


Теорема Коши - Липшица

Рассмотрим з. Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$, G - область, $f \in C(G)$

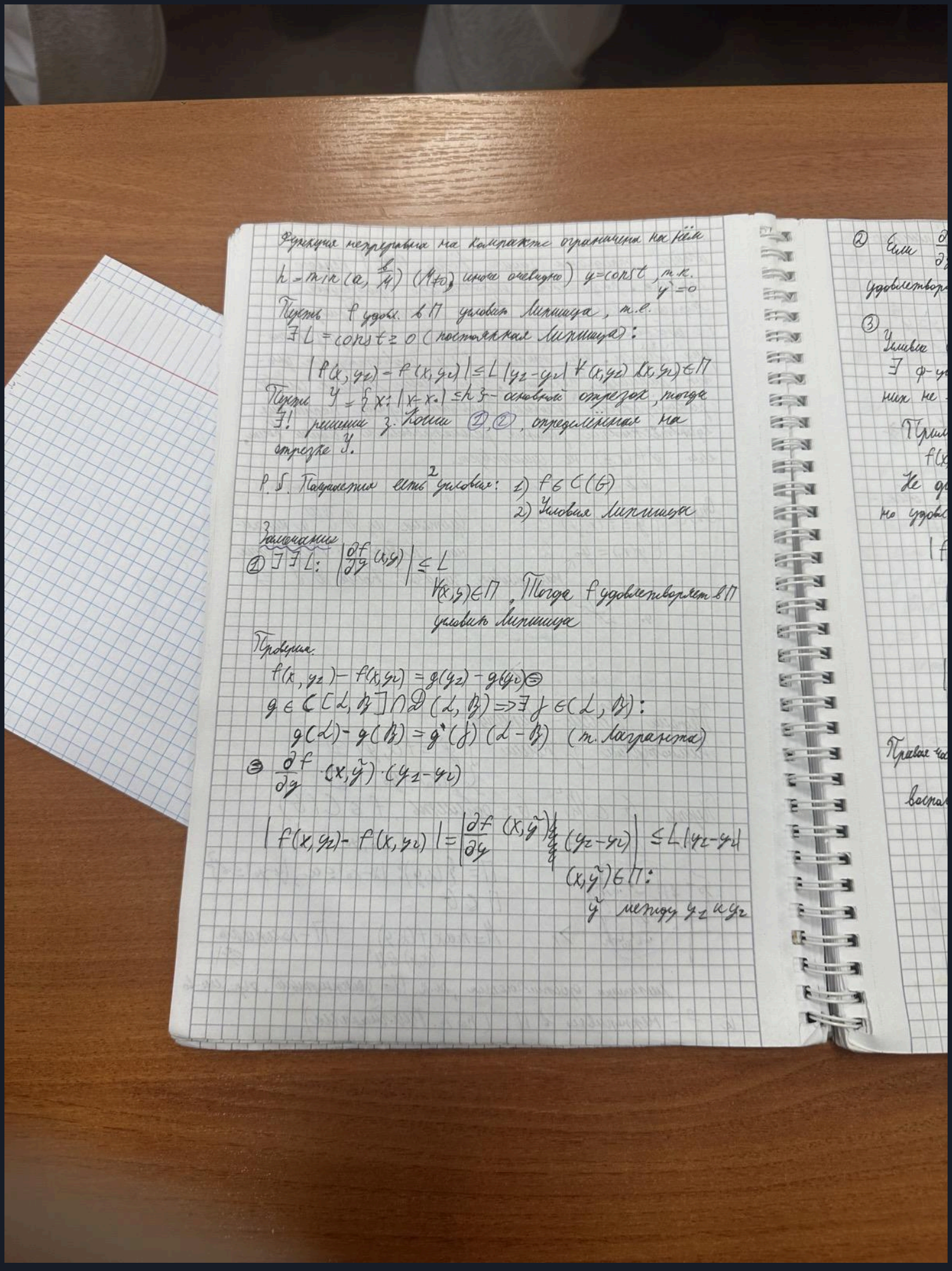
$(x_0, y_0) \in G$



$\Pi = \{(x,y): |x-x_0| \le \alpha, |y-y_0| \le b\}$

$\Pi \subset G$

$M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$ Π - компакт ⇒ M достигается, т.к. Π - замкнутый, огр. мн-во и f - непрерывна в Π. (по т. Вейерштрасса)



Функция непрерывна на компакте ограничена на нём

$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ ($M \neq 0$, иначе очевидно) $y = const$, т.к. $y' = 0$

Пусть f удовл. в Π условию Липшица, т.е.

$\exists L = const \geq 0$ (постоянная Липшица):

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$$

Пусть $\mathcal{Y} = \{x : |x - x_0| \leq h\}$ - основной отрезок, тогда $\exists!$ решение з. Коши ①, ②, определённое на отрезке $\mathcal{Y}$.

Р.S. Параметры есть 2 условия: 1) $f \in C(G)$
2) Условие Липшица

Замечания

① $\exists L$: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L$

$\forall (x, y) \in \Pi$. Тогда f удовлетворяет в Π условию Липшица

Доказ.

$f(x, y_2) - f(x, y_1) = g(y_2) - g(y_1)$ ③

$g \in C[\alpha, \beta] \cap \mathcal{D}(\alpha, \beta) \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha, \beta)$:

$g(\alpha) - g(\beta) = g'(\gamma)(\alpha - \beta)$ (т. Лагранжа)

③ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}) \cdot (y_2 - y_1)$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y})\right| |y_2 - y_1| \leq L|y_2 - y_1|$$

$(x, \tilde{y}) \in \Pi$:

$\tilde{y}$ между y_1 и y_2

② Если $\frac{\partial}{\partial}$

удовлетвор

③ Условия

$\exists$ ф-

них не

Прим

$f(x$

Не

не удов

$|f$

Правая ча

вспом

② Если $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi) \Rightarrow$ (в выпуклой) $\frac{\partial f}{\partial y}$ огранич. $\Rightarrow$ f удовлетворяет усл. Липшица

③ Условия ② и ① сильнее условия Липшица т.е. $\exists$ ф-ции, которые удовлетворяют усл. Липшица для них не выполняются условия ① и ②

Пример

$f(x,y) = |y|$

Не диффер-ма в нуле (как ф-ция одной переменной), но удовл. усл. Липшица.

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le L\,(\in \mathbb{R}^2)\,|y_2 - y_1| \quad \forall (x,y_2),(x,y_1) \in \Pi$$

$$||y_2| - |y_1|| \le L\,|y_2 - y_1|$$

$$\boxed{L = 1}$$

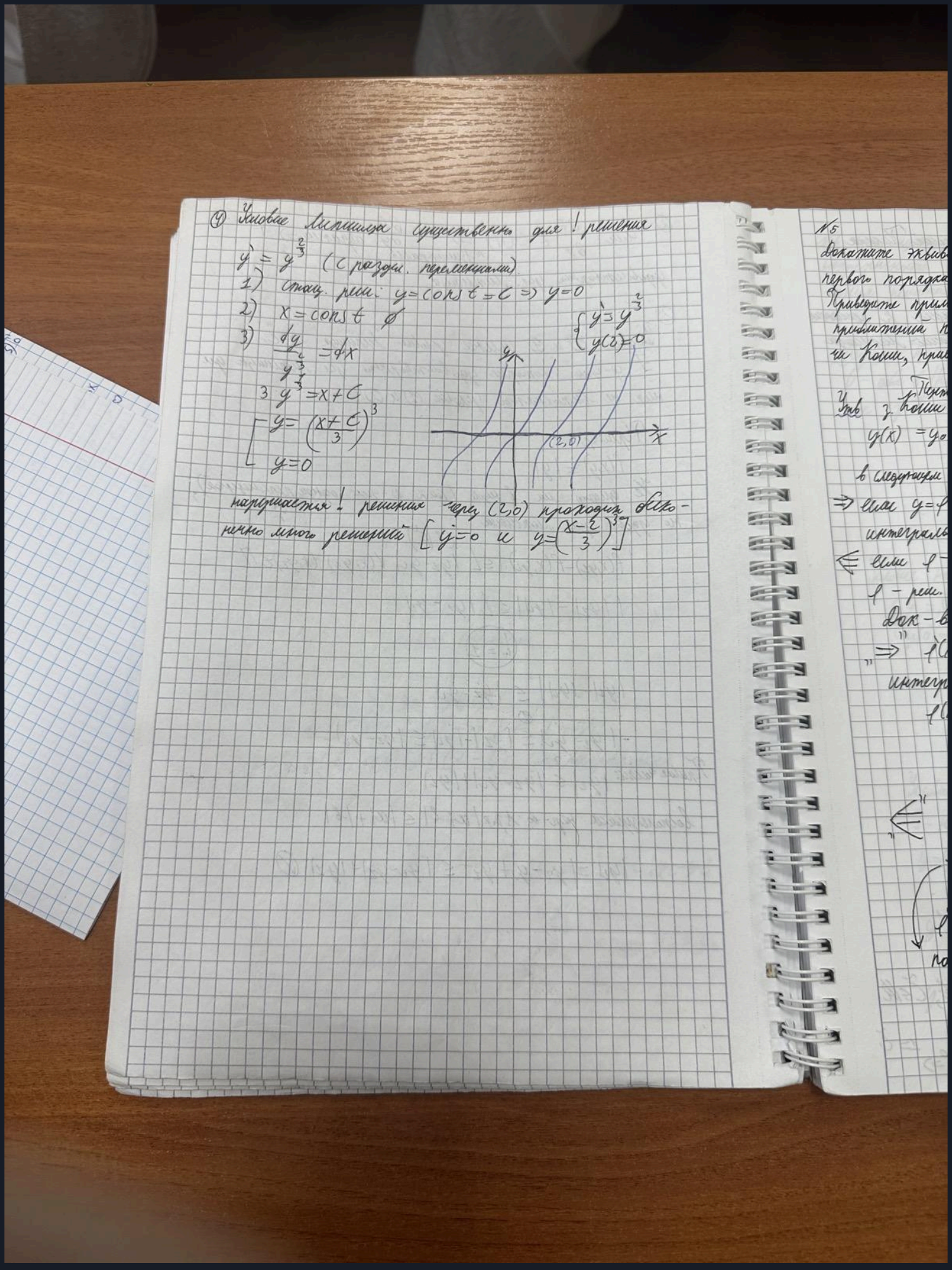
$$||y_2| - |y_1|| \le |y_2 - y_1|$$

$$-|y_2 - y_1| \overset{①}{\le} |y_2| - |y_1| \le |y_2 - y_1|$$

Правая часть: $|y_2| \overset{?}{\le} |y_2 - y_1| + |y_1|$

воспользуемся нер-во Δ, т.е. $|a+b| \le |a| + |b|$

$$|y_2| = |y_2 - y_1 + y_1| \le |y_2 - y_1| + |y_1|$$ ✓


Условие Липшица существенно для ! решения
$y' = y^{\frac{2}{3}}$ (с разд. переменными)
1) стац. реш. $y = \text{const} \; t = C \Rightarrow y = 0$
2) $x = \text{const}$ ✗
3) $\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx$
$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$
$\left[\begin{array}{l} y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3 \\ y = 0 \end{array}\right.$
$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(2) = 0 \end{cases}$
y
x
(2,0)
нарушается ! решения через (2,0) проходит бесконечно много решений $\left[y = 0 \text{ и } y = \left(\frac{x-2}{3}\right)^3\right]$
№5
Докажите эквив
первого порядка
Приведите прим
приближения к
ти Коши, пра
Пусть
Усл. Т. Коши
$y(x) = y_0$
в следующем
⇒ если $y = \varphi$
интеграла
⇐ если φ –
φ – реш.
Док-в
"⇒" $\varphi($
интегр
$\varphi($
"⇐"
φ
по

№5

Докажите эквивалентность задачи Коши для ОДУ первого порядка и некоторого интегрального уравнения. Приведите пример. Расскажите о методе последовательных приближений построения решения рассматриваемой задачи Коши, приведите пример.

Теоремы локально ун.р. Коши-Липшица

Утв 3 Коши ①,② эквивалентна интегральному ур-нию

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \quad ③$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & ① \\ y(t_0) = y_0 & ② \end{cases}$$

в следующем смысле:

$\Rightarrow$ если $y = \varphi(x)$ - решение з. Коши ①②, то φ - решение интегрального ур-ния

$\Leftarrow$ если φ - непрерывное решение инт. ур-ния ③, то φ - реш. з. Коши ①,②

Док-во:

$\Rightarrow$ " $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in M$

интегрируем от x_0 до x

$$\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt \Rightarrow \text{реш } ③$$

$\Leftarrow$ " $\exists$ φ - непрерывное реш. ур-ние ③

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t, \varphi(t))}_{\text{непр}}\,dt \Big|_{\text{продиф.}}$$

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

подставили $x = x_0$

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \ldots = 0$$

Метод последовательных приближений Пикара

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

строим последовательные приближения к решению (в предп., что $\exists$ решение) т. Пеано, т. Коши-Липшица

$y_0 = y_0$

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt$

$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt$

...

$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt$

Пример

$$\begin{cases} y' = y & x_0 = 0,\ y_0 = 1 \\ y(0) = 1 & f(x,y) = y \end{cases}$$

$y_0 = 1$

$y_1 = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x$

$y_2 = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_3 = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2})\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$

...

$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$y_n \rightrightarrows e^x$

$y' = y$

1) $y = 0$

2) $x = \text{const}$ ✗

3) $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + \ln C,\ C > 0$

$|y| = Ce^x,\ C > 0$

$y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \tilde{C}e^x,\ \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y(0) = \tilde{C}e^0 \Rightarrow \tilde{C} = 1$

$\boxed{y = e^x}$

№6 Сформулир... непрерывность ...вания решени... мой.

Теорема Пеа... б - обл. в $\mathbb{R}$... ме т. Кош...

Условие не... $\begin{cases} y' = f \\ y(0) = \end{cases}$

Услови... $\exists$ - ...

$y = \begin{cases} \\ \end{cases}$

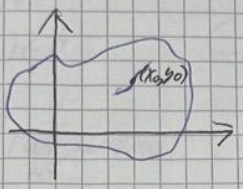
y'

$y'(0)$

№6 Сформулируйте теорему Пеано. Покажите, что непрерывность ф-ции $f(x,y)$ существенна для существования решения задачи Коши, но не является необходимой.

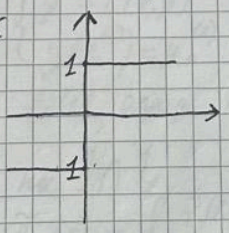
Теорема Пеано

G - обл в $\mathbb{R}^2$, $f \in C(G)$, $(x_0,y_0) \in G$, Тогда $\exists$ решение з. Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$



Условие непрерывности существенно

$\begin{cases} y' = \operatorname{sgn} x \\ y(0) = 2 \end{cases}$



$\begin{cases} y' = \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $y = \begin{cases} x+2, x>0 \\ 2 \\ -x+2, x<0 \end{cases}$

Из непр. y:

$y = \begin{cases} x+2, x>0 \\ 2, x=0 \\ -x+2, x<0 \end{cases}$

такая y не диффер. в нуле. $=\blacktriangledown$

Условие непрерывности f не яв необходимым для $\exists$-ния решения

$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\cos \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), x \neq 0 \\ 0 \end{cases}$

$\lim \nexists$ правая часть разрыва

$y'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = 0$

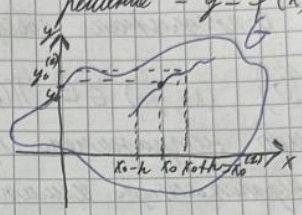
№7. Дайте определение продолжения решения ОДУ вправо (влево), определение продолжимого решения, рассмотрите случаи ограниченной и неограниченной области. Сформулируйте теорему о предельном поведении решений.

$G \subset \mathbb{R}^2$, G – область, $f \in C(G)$, f – липшицева

Т. Пеано: либо (Т К-Д) $\exists!$ реш., опред. на $[x_0-h, x_0+h]=J$

$\exists$ реш. з. Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ (x_0, y_0) \in G \end{cases}$$



$x_0 + h = x_0^{(2)}$ (обозначение)

$\varphi(x_0+h) = y_0^{(2)}$

з. Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0^{(2)}) = y_0^{(2)} & (2) \end{cases}$

$\exists$ решение $\varphi_2(x)$, опред. на отрезке $[x_0^{(2)} - h_2, x_0^{(2)} + h_2] = J_2$.

$\varphi(x) = \varphi_2(x)$ на $J \cap J_2$

Функция $\tilde{\varphi}_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J \\ \varphi_2(x), & x \in (x_0^{(2)}, x_0^{(2)} + h] \end{cases}$

называется продолжением решения $\varphi(x)$ вправо, решение $\varphi(x)$ называется продолжаемым вправо

Можем взять левую з. Коши, т.е.

$x_0^{(2)} + h_2 = x_0^{(2)}$

$\varphi_2(x_0^{(2)} + h_2) = y_0^{(2)}$

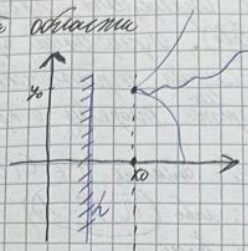
(так можем сказать удобно близко для огран. области)

Приведём пример неогр. области

Случай неограниченной области

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$G = \{(x,y): x > a\}$



Теорема о предельном поведении решений

$f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда $\forall$ решение задачи Коши ① ②, либо неограничено продолжимо вправо, либо имеет вертикальную асимптоту, (т.е. $\exists\, b > x_0$:

$\lim\limits_{x \to b-0} |\varphi(x)| = \infty$)

Пример

$y' = -y^2$

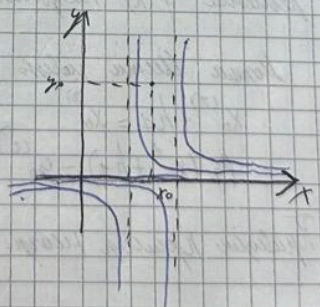
1) $y = 0 \cdot x + b$, $\boxed{y = 0}$

2) φ

3) $-\frac{dy}{y^2} = dx$

$\frac{1}{y} = x + C$, $C \in \mathbb{R}$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{1}{x+C}, C \in \mathbb{R} \end{array}\right.$



№8. Докажите

для уравнений

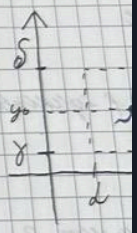
частные случ

одной перемен

ных кривых

Теорема (∃!

$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y \end{cases}$



Док-во

1) $\forall$ - т

] ∃

Докаж

$\varphi(x)$

$\frac{d\varphi(x)}{dx}$

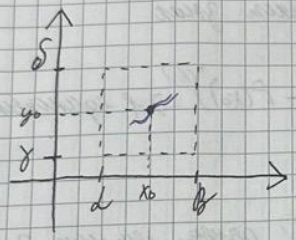
$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi)}$

$\int\limits_{x_0}^{x}$

№8. Докажите теорему существования и единственности для уравнений с разделяющимися переменными. Изложите частные случаи (правая часть зависит только от одной переменной). Приведите пример построения интегральных кривых уравнения с разделяющимися переменными.

Теорема (Т! у-ния с разд. перем.)

$$\begin{cases} y' = f(x)\,g(y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}, \text{ где } f \in C(\alpha,\beta),\ g \in C(\gamma,\delta),$$
$$g(y) \neq 0\ \forall y \in (\gamma,\delta)$$



Тогда через $\forall m.\ (x_0,y_0) \in G = \{(x,y): \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$

проходит единственное решение з. Коши (1), (2)

Док-во:

1) Ед-ть

$\exists$ решению $y = \varphi(x)$ з. Коши (1) (2)

Докажем, что оно единственное.

$$\varphi'(x) = f(x)\,g(\varphi(x))$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)\,g(\varphi(x)) \;\Big|\cdot \frac{1}{g(\varphi(x))}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)\,dx \;\Big|\int_{x_0}^{x}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Сделаем замену

$u = \varphi(t)$

$x \to \varphi(x)$

$x_0 \to \varphi(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

f (непрерывна) $\Rightarrow$ интегрируема, $\exists$ F – первообразная f-ции f

G – первообразная φ-ции $\frac{1}{g}$

$G(\varphi(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$

$G(\varphi(x)) = G(y_0) + F(x) - F(x_0)$ ⑤

$\exists\ G^{-1}$,

$\frac{1}{g} \in C(Y, \delta)$, $\frac{1}{g}$ не меняет знак

$\Rightarrow G$ монотонна

$\varphi(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0))$ ⑥ $\Rightarrow \varphi$ единственна

2) $\exists$-ние решения

а) Можно через т. Пеано

б) Проверим, что ф-ла ⑤ $\Leftrightarrow$ ⑥ опред. решение з. Коши ④ ②

Диффр ⑤ по перем. x

$G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F'(x)$

$\frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) = f(x)$

$\boxed{\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x))} \Rightarrow$ φ реш. ур-ния ④

Проверим начальное условие

$x = x_0$ подставим в ⑥:

$\varphi(x_0) = G^{-1}(G(y_0) + F(x_0) - F(x_0))$

$\boxed{\varphi(x_0) = y_0}$

ЧТД

Дописать

№9. Докажите теорему существования и единственности для уравнений с однородной правой частью (однородных уравнений). Покажите, что интегральные кривые уравнения с однородной правой частью подобны с центром подобия в нуле. Дайте определение инвариантного луча.

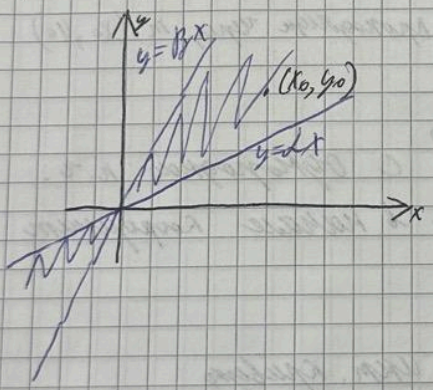
Однородные ур-ния, вид: $\begin{cases} y' = f\left(\frac{y}{x}\right) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$

Теорема $\exists!$

$f(u) \in C(\alpha, \beta)$ $\alpha < \frac{y}{x} < \beta$ $f \in C(\alpha, \beta)$; $f(u) \neq u$ $\forall u \in (\alpha, \beta)$

$G = \{(x,y): \alpha < \frac{y}{x} < \beta,\ x \neq 0\}$

Тогда через $\forall$ т. $(x_0, y_0) \in G$ проходит единственное решение з. Коши (1), (2)



Док-во:

замена $\frac{y}{x} = u$

$G \mapsto \tilde{G} = \{(x,u): \alpha < u < \beta,\ x \neq 0\}$

$u(x_0) = \frac{y_0}{x_0} = u_0$ $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = f(u)$

$u' = \frac{f(u) - u}{x}$

$\dot{u} = f_2(x)\, g_2(u)$

$f_2(x) = x$, $g_2(u) = f(u) - u$ — с разд. переменными

$f_2 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$g_2 \in C(\alpha, \beta)$, $g_2(u) \neq 0$ (т.е. $f(u) - u \neq 0$) $\forall u \in (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow$ т. $\exists!$ ур-ния с разд. перем.

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|x| \Big|_{x_0}^{x} = \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{f(v) - v}$$

$$|x| = |x_0| \, e^{\int_{u_0}^{u} \frac{dv}{f(v)-v}}$$

$$y = ux = x_0 u \, e^{\int_{u_0}^{u} \frac{dv}{f(v)-v}}$$

$(x_0, u_0) \in G_2 \Rightarrow \exists!$ реш., проходящее через т. (x_0, u_0)

Утв

Интегральные кривые ОДУ с однородной п.ч. подобны с центром подобия в начале координат

Док-во:

$x \mapsto Cx$

$y \to Cy$

инт. кривая $\mapsto$ инт. кривая

$\ln|x| = \varphi(u) + C$,

где $\varphi(u)$ – п/о

$\ln|x| = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \tilde{C}$

$\ln|Cx| = \varphi\left(\frac{Cy}{Cx}\right) + \tilde{C}$

$\ln|x| = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \underbrace{\tilde{C} - \ln|C|}_{\tilde{C}_2}$

$y' = f(\frac{y}{x})$

Опр. Ур-ние $f(u) - u = 0$ называется уравнением возможных касательных ур-ния ⑦

$\exists k:\ f(k) = k$, рассмотрим луч $y = kx,\ k \neq 0$

$k = f(k) \Rightarrow y = kx$ - реш. д.у.

Опр. Если $k = f(k)$, то $y = kx$ является решением ур-ния $y' = f(\frac{y}{x})$ и называется инвариантным лучом.

№10. Дайте определение нормальной системы ОДУ, решения нормальной системы ОДУ, задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Дайте определение линейной однородной (ЛОС) и линейной неоднородной системы (ЛНС). Приведите теорему существования и единственности к линейной системе с непрерывной матрицей и непрерывной вектор-функцией в правой части.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases} \quad (10)$$

2. Коши ур-ния n-ого порядка, разреш. относ. старш. производной

$f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $\frac{\partial f}{\partial y_i} \in C(G)$ $\forall i = 0, \dots, n-1$

$(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in G$

Тогда $\exists!$ решение з. Коши (10), определенная на $\ni$

$\ni \{x_0 - h \le x \le x_0 + h\}$

Линейные системы

Нормальные системы

Опр $\exists F^1(t, x_1, \dots, x^n), \dots, F^n(t, x_1, \dots, x_n) \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, G – область

скалярные ф-ции

Система

верхний индекс – номер координаты

$$\frac{dx^i}{dt} = F^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

называется нормальной системой n-ого порядка.

(кол-во ур-ний = кол-во неизвестных)

Опр $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ вектор-функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

в-ф - непр.

$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(t) \end{pmatrix}$

векторная форма

$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(t, \bar{x})$

Пример нормальной системы

$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x^1 + x^2 + x^3) \\ \dot{y} = \dot{x}^2 = 6\cos x^1 + x^2 \\ \dot{z} = \dot{x}^3 = x^1 \operatorname{tg}(x^2 + x^3) \end{cases}$

Опр Решением нормальной системы ОДУ ① называется вектор-функция $\bar{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ опред на $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$:

1) $\bar{\varphi}$ диффф. на $\langle a, b \rangle$
2) $\forall t \in \langle a, b \rangle$ точка $(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)) \in G$
3) $\forall t \in \langle a, b \rangle$ $\dot{\bar{\varphi}}(t) = \bar{F}(t, \bar{\varphi}(t))$

(подстановка решения в ур-ние обр. систему в тождество на мн-ве)

Опр 3. Коши называется система из

$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{F}(t, \bar{x}) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \ \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

Теорема ∃! для нормальных систем ОДУ:

$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(t, \bar{x})$

$G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, G - область, $\bar{F}(t, \bar{x})$, $\frac{\partial \bar{F}^i}{\partial x^j} \in C(G)$

$i, j = 1, \dots, n$

Тогда ур
з. Коши,

Линейн

Опр Лин
мая си-

Вектор

Опр
называ
- ли

Теор
∀

Тогда через $\forall$ т. $(t_0, x_0) \in G$ проходит ! - ное решение з. Коши, опред. на $J = [t_0 - h, t_0 + h]$

Линейные системы

Опр Лин. сис-мой n-ого порядка называется нормальная сис-ма n-ого порядка вида

$$\frac{dx^i}{dt} = a_{i1}(t)x^1 + \dots + a_{in}(t)x^n + f^i(t),\ i = 1, \dots, n$$

$a_{ij}(t),\ f^i(t) \in C\langle a, b\rangle \quad i, j = 1, \dots, n$

Векторная $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$A(t)$ - матрица $n \times n$

Опр Если $\bar{f}(t) = 0\ \forall t \in \langle a, b\rangle$, т.е. $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$, система называется линейной однородной системой (ЛОС), иначе - линейной неоднородной системой (ЛНС)

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2z + 4e^t z \\ \dot{y} = z + \sin t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 + 4e^t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

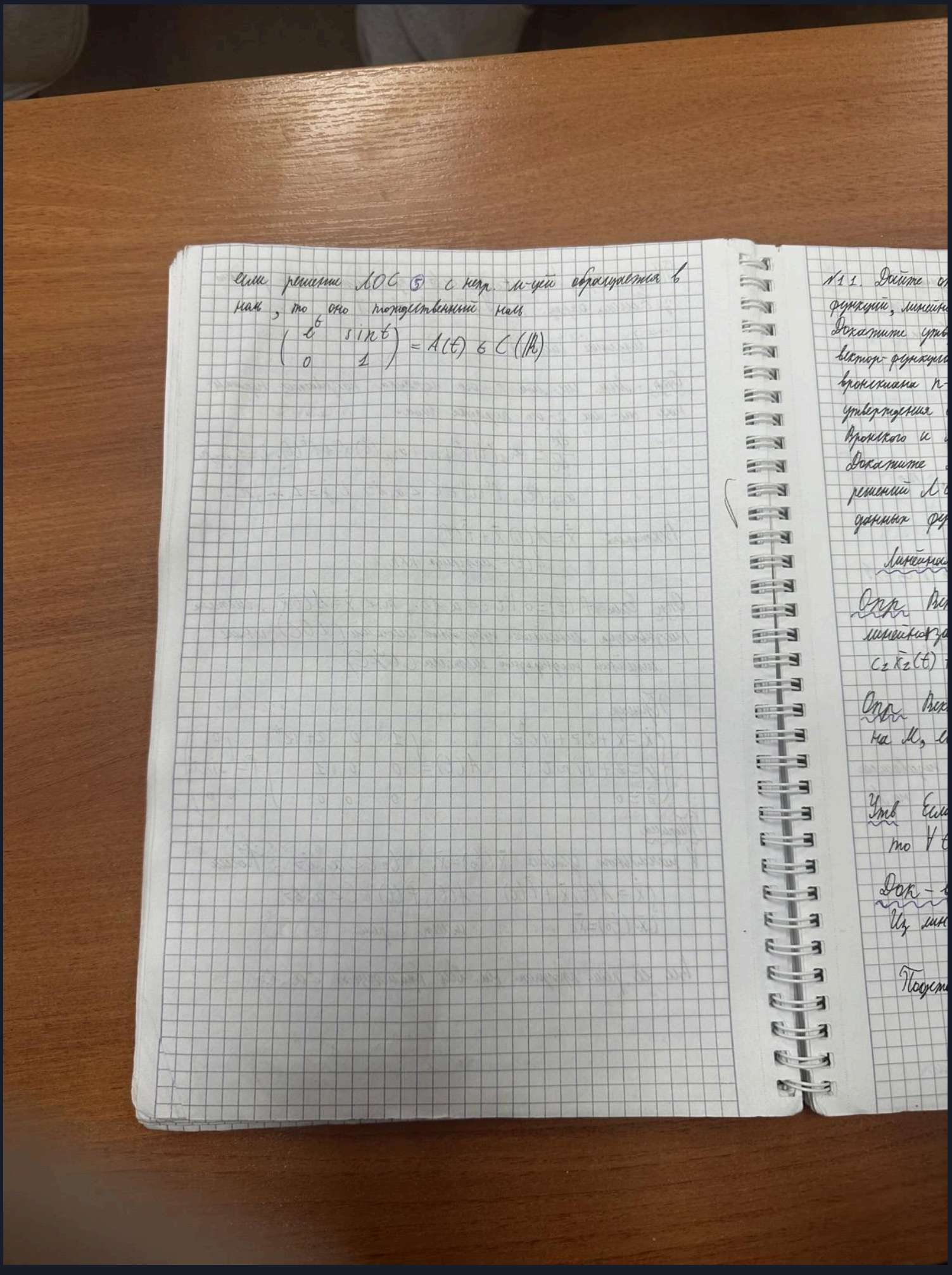
Теорема

$\forall$ начального условия $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, $t_0 \in \langle a, b\rangle$ з. Коши

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases} \qquad A(t), \bar{f}(t) \in C\langle a, b\rangle$$

имеет ! реш.

Все её реш. продолж. на весь промежуток $\langle a, b\rangle$



если решение ЛОС (5) с непр. м-цей образующей A нак, то оно тождественный нуль

$$\begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t) \in C(\mathbb{R})$$

№11. Дайте о
функций, линейн
Докажите утв
вектор-функци
вронскиана н
утверждения
Вронского и
Докажите
решений Л
данных ф

Линейно

Опр. Ве
линейно
$c_1\vec{x}_1(t)$

Опр. Век
на M,

Утв Если
то $\forall t$

Док -
Из ли

Покаж

№11. Дайте определение линейно зависимой системы функций, линейно независимой системы вектор-функций. Докажите утверждение о связи линейной зависимости вектор-функций и их значений. Дайте определение вронскиана n-мерных вектор-функций. Докажите утверждения о связи равенства нулю определителя Вронского и линейной зависимости вектор-функций. Докажите лемму о связи равенства нулю вронскиана решений ЛОС в некоторой точке и линейной зависимости данных функций.

Линейная зависимость вектор-функций

Опр Вектор-функции $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_k(t)$ называются линейно зависимыми на M, если $\exists (c_1, \dots, c_k) \neq \bar{0}$: $c_1\bar{x}_1(t) + \dots + c_k\bar{x}_k(t) = 0 \quad \forall t \in M$

Опр Вектор-функции $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k(t)$ линейно независимы на M, если $\forall (c_1, \dots, c_k) \neq \bar{0}$ $\exists t_0 \in M$: $c_i \in \mathbb{R}$

$$c_1\bar{x}_1(t_0) + \dots + c_k\bar{x}_k(t_0) \neq 0$$

Утв Если $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_k(t)$ линейно зависимы на M, то $\forall t_0 \in M$ их значения линейно зависимые векторы.

Док-во:
Из лин. завис-ти $\exists (c_1, \dots, c_k) = \bar{0}$

$$c_1\bar{x}_1(t) + \dots + c_k\bar{x}_k(t) = 0$$

Подставим $t = t_0$

$c_1\bar{x}_1(t_0) + \dots + c_k\bar{x}_k(t_0) = 0 \Rightarrow$ значения линейно зависимы (ЧТД)

Опр. Определителем Вронского вектор функций $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ называется $\det$ м-цы, по столбцам к-рой записаны вектор-ф-ции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$

$$W_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n}(t) = \det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

Утв

Если $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ линейно зависимы на M, то $W_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n}(t) = 0 \quad \forall t \in M$

Док-во:

$\Rightarrow$ ск из линейной зависимости значений $\forall t_0 \in M$

$$W_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n}(t_0) = \det(\vec{x}_1(t_0) | \dots | \vec{x}_n(t_0)) = 0$$

↑ линейно зависимые

Следствие

Если $\exists\, t_0 \in M : W_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n}(t_0) \neq 0$, то $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ линейно независимы на M

Пример

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{\vec{x}_1,\vec{x}_2} = \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - e^t \neq 0 \text{ при } t = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ лин. незав. $(1, 3)$

Достаточность

Утв Если $W_{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n}(t)=0 \ \forall t \in M$, не обязательно $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ ЛЗ на M

Пример:

$\vec{x}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t)=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$

$W_{\vec{x}_1(t),\vec{x}_2(t)}=\det\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t\\ 1 & t\end{vmatrix}=t-t=0$, но $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ ЛНЗ на $\mathbb{R}$

Пример:

$W(t)=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & t^2\end{vmatrix}=t^2-t^2$ на $(-1,2)$

$W(0)=1\neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$ ЛНЗ на $\mathbb{R}$

№12 Дайте определение фундаментальной системы решений ЛОС. Дайте определение общего решения ЛОС. Докажите теорему об общем решении ЛОС. Дайте определение фундаментальной матрицы ЛОС. Сформулируйте теорему о переходе от одной фундаментальной матрицы ЛОС к другой.

Опр Фундаментальной системой решений ЛОС называется набор из $\forall n$ её линейно независимых решений.

Опр Общее решение ЛОС - мн-во, содержащее все реш. и только их.

Теорема об общем решении ЛОС

$\exists x_1, \dots, x_n$ - ФСР ЛОС (5)

Тогда $\forall$ решения $\bar{y}(t)$ ЛОС (5)

$\exists (c_1, \dots, c_n)$:

$\bar{y}(t) = c_1\bar{x}_1(t) + \dots + c_n\bar{x}_n(t)$ $\forall t \in M$

Док-во:

Возьмём $\forall t_0 \in M$,

рассмотрим $\bar{y}(t_0)$, $\bar{x}_1(t_0), \dots, \bar{x}_n(t_0)$ - линейно независимые в $\mathbb{R}^n$, (если были линейно зависимые, то $W_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n}(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ лин. зависим. на M, $\Rightarrow \forall$ (условием)

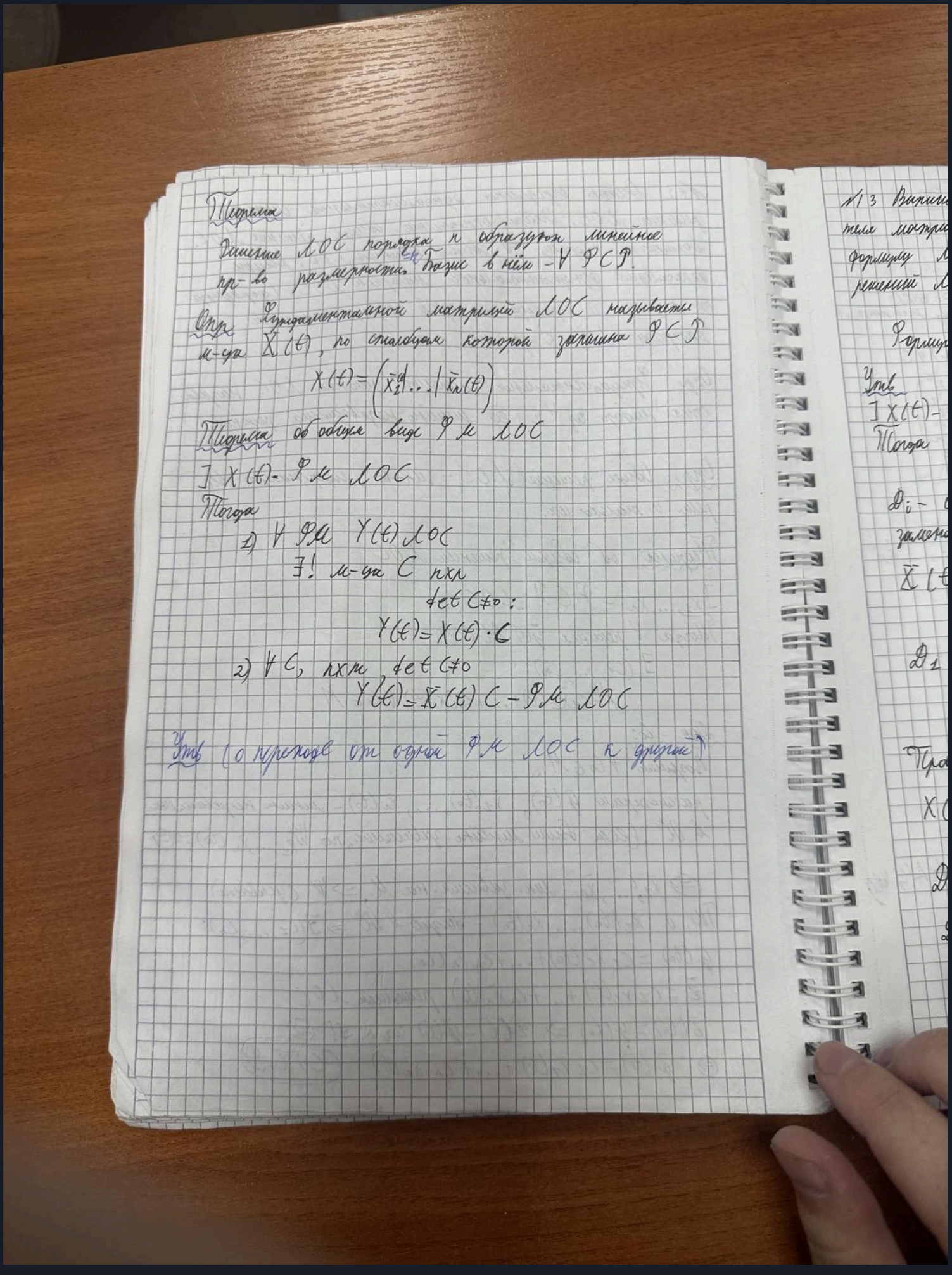
Т. о. $\bar{x}_1(t_0), \dots, \bar{x}_n(t_0)$ - базис в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists (c_1, \dots, c_n)$:

$\bar{y}(t_0) = c_1\bar{x}_1(t_0) + \dots + c_n\bar{x}_n(t_0)$

$\bar{z} = c_1\bar{x}_1(t) + \dots + c_n\bar{x}_n(t)$ решение ЛОС

$\bar{z}(t_0) = y(t_0) \Rightarrow \bar{z}(t) = \bar{y}(t)$ из т. $\exists!$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = c_1\bar{x}_1(t) + \dots + c_n\bar{x}_n(t)$ ЧТД



Теорема

Линейное ЛОС порядка n образуют линейное пр-во размерности n. Базис в нём - ∀ ФСР.

Опр. Фундаментальной матрицей ЛОС называется м-ца $\bar{X}(t)$, по столбцам которой записана ФСР

$$X(t) = \left(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n(t)\right)$$

Теорема об общем виде ФМ ЛОС

$\exists X(t)$ - ФМ ЛОС

Тогда

1) ∀ ФМ $Y(t)$ ЛОС

$\exists!$ м-ца C nxn

$\det C \neq 0$:

$$Y(t) = X(t) \cdot C$$

2) ∀ C, nxn, $\det C \neq 0$

$$Y(t) = \bar{X}(t)\, C - \text{ФМ ЛОС}$$

Утв (о переходе от одной ФМ ЛОС к другой)

№13 Выпишите формулу дифференцирования определителя матрицы, докажите её при $n=2$. Запишите формулу Лиувилля – Остроградского для вронскиана решений ЛОС и докажите при $n=2$.

Формула Лиувилля – Остроградского

Утв
Пусть $X(t)$ – матрица размера $n \times n$, $\mathcal{D}(t) = \det \bar{X}(t)$
Тогда $\frac{d}{dt}\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_n$, где

$\mathcal{D}_i$ – определитель м-цы, которая получается из $\bar{X}(t)$ заменой элементов её i-й строки на их производные.

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & e^t \\ 2 & e^t & 1 \\ 4 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & e^t \\ 2 & e^t & 1 \\ 4 & 0 & t^2 \end{vmatrix}$$

Проверим при $n=2$

$$X(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(t) = \det \bar{X} = ad - bc$$

$$\mathcal{D}' = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c} \quad (*)$$

$$(*) \quad \underbrace{\dot{a}d - \dot{b}c}_{\begin{vmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ c & d \end{vmatrix}} + \underbrace{a\dot{d} - b\dot{c}}_{\begin{vmatrix} a & b \\ \dot{c} & \dot{d} \end{vmatrix}} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

Формула Лиувилля – Остроградского

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$, $A(t)_{n\times n} \in C(M)$, $M \subset \mathbb{R}$

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ – какие-то n её решений, $t_0 \in M$ (след. матрица A)

Тогда

$$W_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n}(t) = W_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n}(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}$$

$\bar{x}_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \dots \\ x_i^n \end{pmatrix}$

Док-во:

$$\frac{d}{dt} W_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n}(t) = \Delta_1 + \dots + \Delta_n$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & & x_n^2 \\ \dots & & \dots \\ \dot{x}_1^i & & \dot{x}_n^i \\ \dots & & \dots \\ x_1^n & & x_n^n \end{vmatrix}$$

подставим вместо $\dot{x}_1^i, \dots, \dot{x}_n^i$

$\dot{\bar{x}}_1 = A(t)\bar{x}_1$

$$\dot{x}_1^i = a_{i1}x_1^1 + \dots + a_{in}x_1^n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_1^j$$

Вычтем 1-ую строку $\times$ на a_{i1}

2-ую строку на a_{i2}

$\dots$

$i-1$ на $a_{i(i-1)}$

$i+1$ на $a_{i(i+1)}$

$\Rightarrow \dot{W}(t) = a_{ii}W(t)$

2) иначе, $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0 \ \forall t \in M$

$$\frac{\dot{W}}{W} = \operatorname{tr} A(t) \quad \Big| \int_{t_0}^{t}$$

$$\ln |W(t)| \Big|_{\tau=t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau$$

$$\left|\frac{W(t)}{W(t_0)}\right| = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau}$$

$$W(t) = \pm W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau}$$

$t = t_0$: $W(t_0) = \pm W(t_0)$ (что и требовалось доказать)

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ \dot{x}_1^2 & \dot{x}_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2^1 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a x_1^1 + b x_1^2 & a x_2^1 + b x_2^2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} a x_1^1 & a x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \dots =$$

$$= a \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \dots = a W(t) + d W(t) =$$

$$= \operatorname{tr} W(t) \cdot \operatorname{tr} A(t)$$

$$\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) \cdot W$$

№14. Доказать утверждение о связи общего решения ЛНС и ЛОС. Доказать о методе вариации постоянных решения ЛНС.

Линейные неоднородные системы

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$, $A(t), \bar{f}(t) \in C(M)$ (ЛНС)

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ (ЛОС)

↓ операторная

$L\bar{x} = 0$ (ЛОС)

$L\bar{x} = \bar{f}$ (ЛНС)

Теорема об общем решении ЛНС

$\bar{x}_{о.н} = \bar{x}_{ч.н} + x_{о.о.}$

1) $\exists\, \bar{x}_{ч.н}$ - фиксированное решение ЛНС. Тогда $\forall$ решения ЛНС $\bar{y}$ $\exists$ решение ЛОС $\bar{z}$:

$\bar{y} = \bar{x}_{ч.н} + \bar{z}$

2) и наоборот:

$\forall$ частного решения $\bar{x}_{ч.н}$ ЛНС и $\forall$ решение ЛОС $\bar{z}$, вектор-функция $\bar{y} = \bar{x}_{ч.н} + \bar{z}$ - решение ЛНС

Док-во:

2) Проверим, что $\bar{y} = \bar{x}_{ч.н} + \bar{z}$ - реш. ЛНС

$L\bar{y} = L(\bar{x}_{ч.н} + \bar{z}) = L\bar{x}_{ч.н} + L\bar{z} = \bar{f} + 0 = \bar{f}$

1) $\exists\, \bar{y}$ - реш. ЛНС $L\bar{y} = f$

$\bar{x}_{ч.н}$ - реш ЛНС $L\bar{x}_{ч.н} = f$

$L\bar{y} - L\bar{x}_{ч.н} = 0$

$L(\bar{y} - \bar{x}_{ч.н}) = 0$

$\Rightarrow y - \bar{x}_{ч.н} \in \operatorname{Ker} L$ (ядро) (Б)

$\Rightarrow \bar{y} - \bar{x}_{ч.н}$ - реш. ЛОС

ЧТД

$\dot{x} - a(t)x = f(t)$

Метод вариации постоянных

(ЛОС)

$\bar{x}(t) = \bar{X}(t)\,\bar{c}$

$\bar{X}$ – фундаментальная матрица, $\det \bar{X} \neq 0 \quad \forall t \in M$

Ищем решение ЛНС в виде

$\bar{y} = \bar{X}(t)\,\bar{c}(t)$

возьмём $\forall t_0 \in M \quad \bar{y}(t_0) = \bar{X}(t_0)\,\bar{c}(t_0)$

$\begin{pmatrix} y^1(t_0) \\ y^2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t_0) & x_{12}(t_0) \\ x_{21}(t_0) & x_{22}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2(t_0) \\ c_1(t_0) \end{pmatrix}$ $c_1 = c_2$

$y^1(t_0) = x_{12}(t_0)\,c_2 + x_{22}(t_0)\,c_2$ (ЛАУ)

$y^2(t_0) = x_{21}(t_0)\,c_2 + x_{22}(t_0)\,c_2$

$\det \bar{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \in M$

Проверка

$\dot{\bar{y}} = A(t)\,\bar{y} + \bar{f}(t)$

$\bar{y} = \bar{X}(t)\,\bar{c}(t)$

$\dot{\bar{y}} = \frac{d}{dt}\left(\bar{X}(t)\,\bar{c}(t)\right) = \dot{\bar{X}}(t)\,\bar{c}(t) + \bar{X}(t)\,\dot{\bar{c}}(t)$

$\dot{\bar{X}}(t)\,\bar{c}(t) + \bar{X}(t)\,\dot{\bar{c}}(t) = A(t)\,\bar{X}(t)\,\bar{c}(t) + \bar{f}(t)$

$\dot{\bar{X}} = A(t)\,\bar{X}$

$\bar{X}(t)\,\dot{\bar{c}}(t) = \bar{f}(t) \quad | \cdot \bar{X}^{-1}(t)$ слева

$\det \bar{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \in M$

$\dot{\bar{c}}(t) = \bar{X}^{-1}(t)\,\bar{f}(t)$

$c = \int_{t_0}^{t} \bar{X}^{-1}(\tau)\,\bar{f}(\tau)\,d\tau + \bar{c}(t_0)$

$\bar{y} = \bar{X}$

$$\bar{y} = \underbrace{\bar{X}(t) \int_{t_0}^{t} \bar{X}^{-1}(\tau)\, \bar{f}(\tau)\, d\tau}_{\text{частное решение ЛНС}} + \underbrace{\bar{X}(t)\, \bar{c}(t_0)}_{\text{решение ЛОС}}$$

№15. Расскажите о переходе от линейного уравнения n-ого порядка к линейной системе, докажите утверждение о сохранении линейной зависимости решений линейного уравнения и линейной системы при данном переходе. Докажите теорему об общем решении линейного однородного уравнения ($ЛОУ$). Дайте определение вронскиана системы функций и расскажите о связи линейной зависимости функций и равенства определителя Вронского этих функций нулю. Докажите формулу Лиувилля-Остроградского для линейных уравнений.

Линейные ур-ния с произвольными коэффициентами.

Опр. $y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\,y = f(t)$, (1)

$a_i(t),\ f(t) \in C(M),\ M \subset \mathbb{R}$ (t, y)

$i = 0, \dots, n-1$

называется линейным ДУ порядка n

Если $f(t) = 0\ \forall t \in M$ — линейное однородное ур-ние.

Иначе — линейное неоднородное ($ЛОУ$/$ЛНУ$)

Переход от $ЛУ$ к $ЛС$

$$\begin{cases} x^1 = y \\ x^2 = \dot{y} \\ \dots \\ x^n = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (2)$$

$\ddot{y} - 2t\dot{y} + 3t^2 y = e^t + 1$

$\begin{cases} x^1 = y \\ \dot{x}^1 = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^1 = y \\ \dot{x}^1 = x^2 \end{cases}$ $\ddot{y} = 2t\dot{y} - 3t^2 y + e^t + 1$

$\begin{cases} x^1 = y \\ \dot{x}^1 = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = 2tx^2 - 3t^2 x^1 + e^t + 1 \end{cases}$

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3t^2 & 2t \end{pmatrix} \quad \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix}$

① $\mapsto$ ②

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = x^3 \\ \dots \\ \dot{x}^{n-2} = x^{n-1} \\ \dot{x}^{n-1} = x^n \\ \dot{x}^n = -a_0(t)x^1 - a_1(t)x^2 - \dots - a_{n-1}(t)x^n + f(t) \end{cases} \quad ③$$

$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix}$$

$$\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Утв

а) При замене ② решения ЛУ ② на мн-ве M переходят в решения ЛС ③ на мн-ве M.

б) При замене ② множества зависимых сохраняются

Док-во:

а) $\exists\, y$ – решение ур-ния ①, $y \in \mathcal{D}^n(M)$ (n раз диф.)

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{y} \\ \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \ddot{y} \\ \dots \\ \frac{d}{dt}(y^{(n-1)}) = y^{(n-1)} \end{cases}$$

$\left(\frac{d}{dt}(y^{(n-1)}) = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)} + f(t)\right)$ ↓ ур-ние ②

б) $\exists\ y_1, \dots, y_k$ линейно зависимы на M.

↓ Докажем, что $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ лин. зав. на M

Дано, т.е. $\exists (c_1, \dots, c_k) \neq \bar{0}$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t) + \dots + c_k y_k(t) = 0 \quad \forall t \in M \\ c_1 \dot{y}_1(t) + \dots + c_k \dot{y}_k(t) = 0 \\ \dots \\ c_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + c_k y_k^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} y_k \\ \dot{y}_k \\ \dots \\ y_k^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in M$$

$\Rightarrow$ вектор-функции $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} y_k \\ \dot{y}_k \\ \dots \\ y_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$ - лин. зав.

$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \dots \\ x_1^n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \dots \\ x_k^n \end{pmatrix}$ лин. зав. на M

$\Rightarrow \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ - лин зав на M

Обратно, если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ лин зав на M,

$\exists (c_1, \dots, c_k) \neq \bar{0}$ $c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_k \bar{x}_k = 0 \quad \forall t \in M$

берём 1-ую к-ту $c_1 x_1^1 + \dots + c_k x_k^1 = 0 \quad \forall t \in M$

$c_1 y_1 + \dots + c_k y_k = 0 \quad \forall t \in M$

Теорема об общем решении ЛОУ

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \dot{y} + a_0 y = 0$, $a_i \in C(\mathbb{R})$ (1)

$\exists\ y_1, \dots, y_n$ линейно независимых на $\mathbb{R}$ решений ЛОУ (1)

Тогда общее решение ЛОУ (1) имеет вид

$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, где $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ произв. пост.

Опр.

ФСР ЛОУ называется $\forall n$ её линейно независимая решений (размерность)

$\dim$ пр-ва решений ЛОУ порядка n равна n.

Это линейное пр-во

— — Базис — $\forall$ ФСР — — — — — —

$Ly = 0$, $L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots a_1 \frac{d}{dt} + a_0$

Определитель Вронского

Опр.

Определителем Вронского (вронскианом) ф-ций $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ называется

$$W = W_{y_1, \dots, y_n}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dots & \dot{y}_n \\ \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \dots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$ (2)

0) При зам... det Вронского

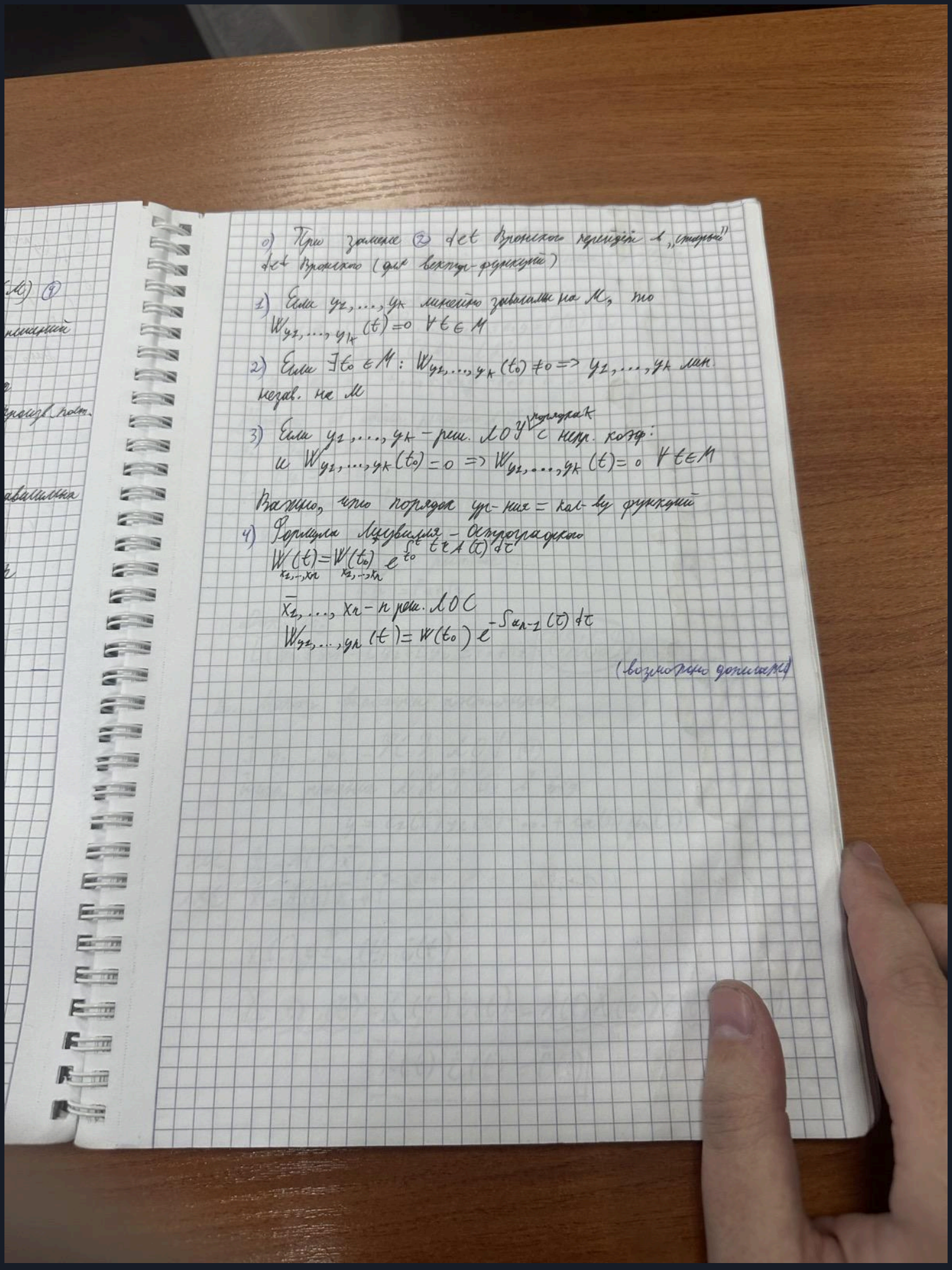
1) Если $y_1, \dots$ $W_{y_1, \dots, y_n}$

2) Если $\exists t$ ... неприв. на ...

3) Если ... и W ...

Замеч...

4) Форм... $W(...$



о) При замене ② det вронского переходит в „старый" det вронского (для вектор-функций)

1) Если $y_1, \dots, y_k$ линейно зависимы на M, то $W_{y_1, \dots, y_k}(t) = 0 \quad \forall t \in M$

2) Если $\exists t_0 \in M : W_{y_1, \dots, y_k}(t_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_k$ лин. независ. на M

3) Если $y_1, \dots, y_k$ – реш. ЛОУ порядка k с непр. коэф:
и $W_{y_1, \dots, y_k}(t_0) = 0 \Rightarrow W_{y_1, \dots, y_k}(t) = 0 \quad \forall t \in M$

Важно, что порядок ур-ния = кол-ву функций

4) Формула Лиувилля – Остроградского

$$W_{x_1, \dots, x_n}(t) = W_{x_1, \dots, x_n}(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}$$

$\bar{x}_1, \dots, x_n$ – н. реш. ЛОС

$$W_{y_1, \dots, y_n}(t) = W(t_0)\, e^{-\int a_{n-1}(t)\, dt}$$

(возможны дописки)

№16. Расскажите о методе вариации постоянных решения линейного неоднородного уравнения (ЛНУ)

Линейные неоднородные ур-ния

$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$ (2)

$f, a_i \in C(M)$ ЛНУ

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$ ЛОУ (4)

Теорема об общем решении ЛНУ

$y_{он} = y_{ен} + y_{оо}$

I. $Ly = f_1 + f_2$

$\exists\, y_1$ - реш. ур. $Ly = f_1$

y_2 - реш. ур $Ly = f_2$

Тогда $y_1 + y_2$ - решение

$Ly = f_1 + f_2$

Док-во:

$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = f_1 + f_2$ (ЧТД)

II. Метод вариации постоянных

$\exists\, y_1, \dots, y_n$ - ФСР ЛОУ (4)

Ищем решение ЛНУ (1) в виде

$y = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$

ЛОС $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$

ЛНС $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}$

$\bar{x}(t) = \bar{X}(t)\bar{c}(t)$

$\dot{\bar{X}}(t)c(t) + \bar{X}(t)\dot{\bar{c}}(t) = A(t)\bar{X}(t)\bar{c}(t) + \bar{f}(t)$

$\boxed{X(t)\dot{\bar{c}}(t) = \bar{f}(t)}$

$$\bar{X}(t) = \left(\bar{x}_1 | \dots \bar{x}_n\right), \quad \dot{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1 y_1 + \dots + \dot{c}_n y_n = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{y}_1 + \dots + \dot{c}_n \dot{y}_n = 0 \\ \dots \\ \dot{c}_1 y_1^{(n-2)} + \dots + \dot{c}_n y_n^{(n-2)} = f(t) \end{cases}$$

№17. Дайте определение характеристического многочлена ЛОУ. Докажите теорему об общем решении ЛОУ с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.

Линейные ур-ния с постоянными коэффициентами.

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x)$, $y = y(x)$ (2)

$a_n \neq 0$, $a_i = const \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Общая теория

Т-ия ЛОУ n-ого порядка с пост. коэф.

$\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$, $\mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}^k = \frac{d^k}{dx^k}$

$\mathcal{D} y = y'$; $\mathcal{D}^k y = y^{(k)}$

$a_n \mathcal{D}^n y + \dots + a_2 \mathcal{D} y + a_0 y = 0$

$(a_n \mathcal{D}^n + \dots + a_2 \mathcal{D} + a_0) y = 0$

$L(t)$

$L(\mathcal{D}) = a_n \mathcal{D}^n + \dots + a_2 \mathcal{D} + a_0$

Опр Характеристический многочлен ЛОУ (2) называется многочлен вида

$$L(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda + a_0$$

Ур-ние $L(\lambda) = 0$ называется характеристическим ур-нием ЛОУ (2)

Св-ва:

$L(\mathcal{D})$, $M(\mathcal{D})$, $y = y(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_2(x) \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$, $2 \in \mathbb{R}$

Тогда:

1) $(L+M)y = Ly + My$

$(\lambda L(D))\, y = \lambda \cdot L(D)y$

2) L – линейный, т.е.

$L(D)(y_1+y_2) = L(D)y_1 + L(D)y_2$

$L(D)(\lambda y) = \lambda L(D)y$

$Ly = 0 \Rightarrow$ ядро $y \in$ ядро L

3) $y = e^{\lambda x}$ – реш. ЛОУ ② $\Leftrightarrow$ λ – корень хар. многочлена

$y = e^{\lambda x}$ – подставим; $D\, e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

$L(D)\, e^{\lambda x} = a_n \lambda^n e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x}$ ⊖

⊖ $(a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0)\, e^{\lambda x}$ ⊖

$L(\lambda)$ – хар. многочлен

⊖ $L(\lambda)\, e^{\lambda x}$

$y = e^{\lambda x} \in$ ядро $L \Leftrightarrow L(\lambda) = 0$

4) $(L(D)\, M(D))\, y = L(D)\,(M(D)\, y)$

// многочлены

$(M(D)\, L(D))\, y = M(D)\,(L(D)\, y)$

5) 9-ка свойств

$L(D)$ – многочлен степени n, $y \in D^n(\mathbb{R})$, $\lambda = \text{const}$

$$L(D)\,(e^{\lambda x} y(x)) = e^{\lambda x} L(D+\lambda)\, y(x)$$

ЛОУ с постоянными коэфф. в случае некратных корней

$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \dot{y} + a_0 y = 0$ ②

$a_n \neq 0$, $a_i = const$

Теорема

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ – корни характеристического многочлена $L(y)$ ЛОУ ②, попарно различны ($\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$)

Тогда ФСР ЛОУ имеет вид

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$

и общее реш. имеет вид

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$, c_i – произв. пост.

$\forall x \in \mathbb{R}$

Док-во:

а) их n штук ④

1) y_k, $k = 1, \dots, n$ – решения, т.к. λ_k – корень х-ко ③

$y_k = e^{\lambda_k x}$

2) они лин. незав.

Достаточно найти $x_0 \in \mathbb{R} : W_{y_1, \dots, y_n}(x_0) \neq 0$

Ф-ла смещения

$L(D)$ мн-н ст. n, $D = \frac{d}{dx}$

$\lambda = const \in \mathbb{C}$

f диффр n раз

Тогда: $L(D)\left(e^{\lambda x} f(x)\right) = e^{\lambda x} L(D+\lambda) f(x)$

Д-во:

$n=1$ $\quad L(D) = aD + b,\ a, b \in \mathbb{C}$

$(aD+b)(e^{\lambda x} f(x)) =$

$= aD(e^{\lambda x} f(x)) + b e^{\lambda x} f(x) =$

$= a(\lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x)) + b e^{\lambda x} f(x) =$

$= e^{\lambda x}[a D f(x) + a\lambda f(x) + b f(x)] =$

$= e^{\lambda x}[a(D+\lambda) f(x) + b f(x)] = e^{\lambda x} L(D+\lambda) f(x)$

$k \le n$ — $deg = n+1$

$L(D) = M_1(D) M_2(D)$

$1 \quad deg \le n$

$L(D)(e^{\lambda x} f(x)) = (M_1(D) \cdot M_2(D))(e^{\lambda x} f(x)) =$

$= M_1(D)(M_2(D)(e^{\lambda x} f(x))) =$

$= M_1(D)(e^{\lambda x} M_2(D+\lambda) f(x)) =$

$= e^{\lambda x} M_1(D+\lambda) M_2(D+\lambda) f(x) =$

$= e^{\lambda x} L(D+\lambda) f(x).$

1.18 Докажите теорему об общем решении ЛОУ с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения, предварительно доказав формулу смещения.

Случай кратных корней

Теорема

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ – попарно различные корни хар. мн-на ЛОУ ② кратностей $k_1, \dots, k_m$ соответственно.
Тогда $\forall$ ЛОУ ② имеет вид

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$
$y_2 = x e^{\lambda_1 x}$
...
$y_{k_1} = x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}$

$y_{k_1+1} = e^{\lambda_2 x}$
$y_{k_1+2} = x e^{\lambda_2 x}$
...
$y_{k_1+k_2} = x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}$

... $y_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m x}$
...
$y_{k_1+\dots+k_m} = x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}$

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ – общее реш. ЛОУ

Док-во:

0) их n штук

1) Д-м, что y_i – решения
$\exists \lambda$ – корень $L(D)$ кратности k,
Д-м, что $L(D)(x^r e^{\lambda x}) = 0$, $r = 0, 1, \dots, k-1$.

$L(D) = (D-\lambda)^k$ – корень $M(D)$ ← мн-н
$M(\lambda) \neq 0$

$L(D)(e^{\lambda x} x^r) = e^{\lambda x} L(D+\lambda) x^r$
ф-ла смещения

$L(D+\lambda) = D^k M(D+\lambda) = M(D+\lambda) D^k$ ⊖
⊖ $M(D+\lambda) D^k x^r = 0$, $r < k$

Замечание

$y_{00} = e^{\lambda_1 x} P_{k_1-1}(x) + \dots + e^{\lambda_m x} P_{k_m-1}(x)$,
где $P_{k-1}(x)$ – мн-н степени $k_i - 1$, с произв. коэфф.

2) Д-м, что линейно незав.

От противного,] лин. незав., т.е.

] лин-ые $\rho_{k_2-2}(x), \dots, \rho_{k_m-2}(x)$

(хотя бы один из них не нуль).

$e^{\lambda_2 x}\rho_{k_2-2}(x) + \dots + e^{\lambda_m x}\rho_{k_m-2}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

по индукции

$m = 2$

$\rho_{k_2-2}(x)\, e^{\lambda_2 x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad | : e^{\lambda_2 x}$

$\rho_{k_2-2}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ противоречие,

предполагали, что хотя один лин-к $\neq 0$

$m-1 \mapsto m$

$e^{\lambda_2 x}\rho_{k_2-2}(x) + \dots + e^{\lambda_m x}\rho_{k_m-2}(x) = 0 \quad | : e^{\lambda_2 x}$

(предп. что есть нетривиал. лин-к,] $\rho_{k_2-2}(x)$)

$\rho_{k_2-2}(x) + e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\rho_{k_3-2}(x) + \dots + e^{(\lambda_m-\lambda_2)x}\rho_{k_m-2}(x) = 0$

продифф. k_2 раз

$e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}\tilde{\rho}_{k_3-2}(x) + \dots + e^{(\lambda_m-\lambda_2)x}\tilde{\rho}_{k_m-2}(x) = 0$

$\mathcal{D}^{k_2}\left(e^{(\lambda_k-\lambda_2)x}\rho_{k_k-2}(x)\right) = e^{(\lambda_k-\lambda_2)x}(\mathcal{D}+\lambda_k-\lambda_2)^{k_2}\rho_{k_k-2}(x)$ (по ф-ле сдвига)

по предп. инд. $\Rightarrow \tilde{\rho}_{k_3-2}(x) = \dots \tilde{\rho}_{k_m-2}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

но $\tilde{\rho}_{k_m-2}(x) \neq 0$, т.к. $\rho_{k_2-2}(x) \neq 0$

№19. Дайте определение квазимногочлена. Как связаны общее решение ЛНУ и общее решение ЛОУ? Докажите теорему о частном решении ЛНУ с постоянными коэф. с правой частью в виде квазимногочлена

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y' + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0, \quad a_k = const \in \mathbb{R}$$

Частное решение ЛНУ с правой частью в виде квазимногочлена

Опр Квазимногочленом называется выражение вида (являющаяся конечной суммой)

$$e^{\lambda x} P(x), \text{ где } \lambda \in \mathbb{C}, P - \text{многочлен}$$

① Замечание $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} \cdot (\cos\beta + i \sin\beta)$ (формула Эйлера)

В ~~веще~~ вещественном случае рассматриваем конечные суммы выражений:

$$P(x), \cos\beta x P(x), \sin\beta x P(x)$$
$$e^{\alpha x} P(x), e^{\alpha x} \cos\beta x P(x), e^{\alpha x} \sin\beta x P(x)$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

Пример

в комп. случае: $e^{(2+3i)x} \cdot (x^2+4) + e^{4x} \cdot x$

в вещ. случае: $x^2 + e^x + 2\cos x \cdot e^x \cdot x$

② Замечание Общее решение ЛОУ с пост. коэф. является квазимногочленом

$$L(D)\, y = f_2 + \dots + f_k$$
$$f_i = e^{\alpha_i x} P_i(x)$$
$$y_r = y_2 + \dots + y_k$$

Теорема (о частном решении ЛДУ с правой частью в виде квазиполинома)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = e^{\mu x} f_N(x), \quad (5)$$

где $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, const, $\mu = \text{const} \in \mathbb{C}$ ← перем

f_N - мн-н степени N,

$s = 0$, если μ не является корнем характеристического многочлена,

s = кратности μ как корень хар. многочлена, если μ - корень ($L(\mu) = 0$)

Тогда $\exists$ частное реш. ур-ния (5) вида $y = x^s e^{\mu x} g_N(x)$, где g_N - мн-н степени N, коэф. которого однозначно определены

Док-во:

ф-ла смещения

$$L(D)\left[e^{\mu x} f(x)\right] = e^{\mu x} L(D+\mu) f(x)$$

$$L(D)\left(x^s e^{\mu x} g_N(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$L(D) = (D-\mu)^s M(D), \text{ где } M(\mu) \neq 0$$

(многочлен)

$$\Leftrightarrow e^{\mu x} L(D+\mu)\left[x^s g_N(x)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(D+\mu) = D^s M(D+\mu) = M(D+\mu) D^s$$

$$e^{\mu x} M(D+\mu) D^s \left[x^s g_N(x)\right]$$

$$e^{\mu x} f_N(x)$$

левая ч.

$$e^{\mu x} M(D+\mu) D^s [x^s g_n(x)] = e^{\mu x} f_n(x) \quad | : e^{\mu x}$$

мн-н → $\boxed{M(D+\mu) D^s [x^s g_n(x)] = f_n(x)}$ ⑥ ← мн-н

слева и справа мн-ны степени n

справа мн-н степени n, $\quad M(\mu) \neq 0$

слева тоже мн-н степени n

$g_n = a_n x^n + \tilde{g}_{n-1}(x)$ ← степени многочлена

$f_n(x) = b_n x^n + f_{n-1}(x)$

найдём a_n

котор. при x^n справа в ⑥:

b_n

слева:

$M(D+\mu) D^s [(a_n x^n + \tilde{g}_{n-1}(x)) x^s]$

$M(D+\mu) D^s [a_n x^{n+s}] =$

$a_n \dfrac{(n+s)!}{n!} M(\mu)$

котор. при a_n

$a_n \dfrac{(n+s)!}{n!} \cdot M(\mu) \neq 0 = b_n$

$\Rightarrow \boxed{a_n = \dfrac{b_n n!}{(n+s)!\, M(\mu)}}$

котор. $a_{n-1}, \ldots$ и т.д. находим,

сведя задачу к ур-нию

на мн-ны меньшей степени

ЧТД

№20. Доказать интегральную формулу Коши нахождения частного решения ЛНУ.

Интегральная формула Коши

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x), \quad (*)$$

где $a_i(x), f(x) \in C(M)$, $M \subset \mathbb{R}$

// $a_n = 1$

Пусть $L \in M$

начало

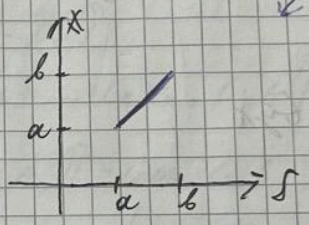
Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – ФСР ЛОУ, соотв. ур-нию (*)

ф-ция $K(x,s)$ имеет вид

$$K(x,s) = C_2(s) y_2(x) + \ldots + C_n(s) y_n(x)$$

← решение

$$K(s,s) = 0$$
$$K'_x(s,s) = 0$$
$$\ldots$$
$$K_x^{(n-2)}(s,s) = 0$$
$$K_x^{(n-1)}(s,s) = 1$$



Тогда ∃ частное решение ЛНУ (*) вида

$$Y(x) = \int_L^x K(x,s) f(s)\, ds$$

Док-во:

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \int_L^x K'_x(x,s) f(s)\, ds + \underbrace{K(x,x)}_{\text{II}^0} F(x)$$

$$Y''(x) = \int_L^x K''_x(x,s) f(s)\, ds + \underbrace{K'_x(x,s) f(s)\Big|_{s=x}}_{K'_x(x,x) f(x) \equiv 0} \quad (**)$$

аналогично до $y^{(n-2)} = \int_2^x K_x^{(n-2)}(x,s)\, f(s)\,ds$ ①

② $K^{(n-2)}(x,s)\, f(s)\big|_{s=x}$ ($K^{(n-2)}(x,s) = 0$)

$y^{(n)} = \int_2^x K_x^{(n)}(x,s)\, f(s)\,ds + K_x^{(n-1)}(x,s) f(s)\big|_{s=x}$ ③

($K_x^{(n-1)}(x,s) = 1$, $f(x)$)

Подставим в ур-ние ②:

$\int_2^x K_x^{(n)}(x,s) f(s)\,ds + f(x) + a_{n-2}(x) \int_2^x K_x^{(n-2)}(x,s) f(s)\,ds$
$+ \dots + a_2(x) \int_2^x K_x'(x,s) f(s)\,ds + a_0(x) \int_2^x K(x,s) f(s)\,ds$ ④

④ $\int_2^x (K_x^{(n)} + a_{n-2} K_x^{(n-2)} + \dots + a_0 K) f(s)\,ds + f(x) = f(x)$

($K_x^{(n)} + a_{n-2} K_x^{(n-2)} + \dots + a_0 K = 0$)

ЧТД

Пример

$y'' + 4y = \operatorname{tg} x$

№21 Докажите теорему об общем решении ЛОС с постоянными коэф. (дав определение всех участвующих в формулировке понятий).

Линейные системы с постоянными коэффициентами.

ЛОС с пост. коэф.

$\vec{\dot{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$ ЛНС

① $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, A - матрица $n \times n$ $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = const \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция

Знаем, что реш ЛОС порядка n образует ЛП размерности n $\Rightarrow$ базис - ФСР

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ - ФСР

$\vec{x}_{oo} = c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n$, $c_k \in \mathbb{R}$, н.н.

Утв] λ - с.з м-цы A, $\vec{v}$ - соотв. с.в.

Тогда $\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{v}$ - реш. ЛОС ①

Док-во:

Напоминание

с.з. находим из ур-ния $\det(A - \lambda E) = 0$

Опр λ - с.з. м-цы A, если $\exists \vec{v} \in \mathbb{C}^n \neq 0$:

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$,

$\vec{v}$ называется с.в м-цы A

Проверим, что $\bar{x} = e^{\lambda t}\bar{v}$ – реш. ЛОС ①:

$\dot{\bar{x}} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\bar{v}) = \lambda e^{\lambda t}\bar{v}$ (левая часть)

$A\bar{x} = A(e^{\lambda t}\bar{v}) = A\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda t}v_1 \\ \dots \\ e^{\lambda t}v_n \end{pmatrix} = e^{\lambda t}A\bar{v} =$

$= e^{\lambda t}\lambda\bar{v} \Rightarrow$ левая часть = правой части

ЧТД

Случай
I. М-ца A имеет n различных с. значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и соответ. с. в $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

Тогда $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ лин. незав.

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{F}: e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t}\bar{v}_n$, т.к.

1) их n штук

2) они лин. незав.

$W_{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n}(0) = \begin{vmatrix} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \end{vmatrix} \neq 0$

II. $\forall$ с. з. кр-ти k соотв. k лин. незав. с. в.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$ – жорданова форма м-цы A

$\lambda_1 = 2 \quad k_1 = 2 \quad \bar{e}_1, \bar{e}_2$

$\lambda_2 = 22, \quad k_2 = 1, \quad \bar{e}_3$

$e^{2t}\bar{e}_1, e^{2t}\bar{e}_2, e^{22t}\bar{e}_3$ – они лин. незав.

то $\mathcal{F}$ устроена так же как в случае I

(только λ_k могут совпадать)

Т. ∃ кратное с.з λ - кр-ти k:
$\dim$ собств. пр-во $< k$
(сис-ма соотв. $< k$ с. в)
$\dim \ker (A - \lambda E) < k$
геом. кр-ть $< k$ = алг. кр-ти

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 22$, $k_2 = 1$ с. в. $\bar{e}_3$

$\lambda_2 = 2$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ $b = 0$, $20c = 0$

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - с. в.

Утв
$\forall A$ $n \times n$ $\exists$ невырожд. C $n \times n$ ($\det C \neq 0$):
$J = C^{-1} A C$, где
J - жорданова нормальная форма м-цы,
J имеет блочный вид

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{K_6} \end{pmatrix} \quad n \times n$$

на диагонали с.з:
K_m - ж. клетка $= \begin{pmatrix} \lambda & & \emptyset \\ & \lambda & \\ \emptyset & & \lambda \end{pmatrix}$

Опр λ с.з м-цы A, которому соотв. ж. клетка размера $k \times k$
(серией) присоединенных векторов называется набор:
$h_1 \neq 0$ - с.в. $A\bar{h}_1 = \lambda \bar{h}_1$

$(A-\lambda E)\bar{h}_1 = 0$

$A\bar{h}_1 = \lambda\bar{h}_1 + \bar{h}_2 \quad (A-\lambda E)\bar{h}_2 = \bar{h}_2$

$\dots$

$A\bar{h}_k = \lambda\bar{h}_k + \bar{h}_{k-1} \quad (A-\lambda E)\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1}$

$\bar{h}_k \mapsto \dots \mapsto \bar{h}_2 \mapsto \bar{h}_1 \mapsto 0$

$A-\lambda E$

Утв. $\exists$ λ - с. з. м-цы A, которому соот. (серия) присоед. векторов $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k$

тогда часть ФСР соответств. данной жордановой клетке размера $k \times k$ имеет вид:

$\bar{x}_1 = e^{\lambda t}\bar{h}_1$

$\bar{x}_2 = e^{\lambda t}(\bar{h}_1 t + \bar{h}_2)$

$\bar{x}_3 = e^{\lambda t}\left(\bar{h}_1 \frac{t^2}{2!} + \bar{h}_2 t + \bar{h}_3\right)$

$\dots$

$\bar{x}_k = e^{\lambda t}\left(\bar{h}_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \bar{h}_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + \bar{h}_k\right)$

Д-во:

Проверим, что $\forall \bar{x}_k$ явл. решением

$\bar{x}_1$ - решение, д-ми раньше

Докажем, что x_2 - реш.

$\boxed{\dot{\bar{x}} = A\bar{x}}$ (1)

$л.ч. = \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}(\bar{h}_1 t + \bar{h}_2)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} t\bar{h}_1 + e^{\lambda t}\bar{h}_2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda e^{\lambda t} \cdot t + e^{\lambda t})\bar{h}_1 + \lambda e^{\lambda t}\bar{h}_2$

$л.ч = A\bar{x_i} = A \cdot (e^{\lambda t}(\bar{h_2}t + \bar{h_i})) \ominus$

$\ominus e^{\lambda t} A(\bar{h_2}t + \bar{h_i}) = e^{\lambda t}(\lambda \bar{h_2}t + \lambda \bar{h_i} + \bar{h_2})$

$\bar{x_k}$ - реш

$л.ч = \frac{d}{dt}(x_k) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h_2} + \ldots + \bar{h_k}\right)e^{\lambda t}\right] \ominus$

$\ominus \lambda e^{\lambda t}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h_2} + \ldots + \bar{h_k}\right] + e^{\lambda t}\left[\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\bar{h_2} + \ldots + \bar{h_{k-1}}\right] = \boxed{\lambda \bar{x_k} + \bar{x}_{k-1}}$ - левая часть

$л.ч = A\bar{x_k} = A \cdot \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h_2} + \ldots + \bar{h_k}\right]e^{\lambda t} \ominus$

$\ominus \left[\lambda \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\vec{h_2} + \lambda \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\vec{h_2} + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\vec{h_2} + \ldots + \lambda \vec{h_k} + \vec{h_{k-1}}\right]e^{\lambda t} \ominus$

$\ominus \boxed{\lambda \bar{x_k} + \bar{x}_{k-1}}$ - правая часть $\Rightarrow \boxed{л.ч = п.ч}$

ЧТСД

~~Они лин. незав.~~

~~$W_{\bar{x_2},\ldots,\bar{x_n}}(0) = \det(\bar{h_2}\bar{h_2}\ldots\bar{h_k})$~~

Теорема (как найти ФСР ЛОС)

1) Находим собств. знач. м-цы A;

2) $\forall$ ж. клетки, соотв. с. з. м-цы A (клетка размера $k \times k$) находим части ФСР из утв. выше

3) В итоге имеем ФСР (n лин. незав. решений)

Док - во

Это ФСР, т.к.

1) их n штук (вектор-ф-ий)

2) $\forall$ вектор-ф-ия - это решение

3) они лин. незав. $W_{\bar{x_2},\ldots,\bar{x_n}}(0) = \det$ м-цы,

по столбцам которой жорд. базис f^0

Замечания

1) Если $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$, то жорд. базис может выбрать так: если $\lambda\in\mathbb{R}$, то соотв. прилож. и собств. векторы – вещественные
если $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda=\alpha+\beta i$
$\lambda=\alpha-\beta i$
то серии можем выбрать комплекс. – сопряженные

2) $\bar z=\bar u+i\bar v$ реш. ЛОС ①,
то $\bar u$ и $\bar v$ – реш. ЛОС ①

3) Общее решение ЛОС имеет вид сумма
$e^{\lambda t}\bar P_N(t)$
N = размер max жорд. клетки, соотв. λ, минус один, где
$\bar P_N$ – векторный мн-н степени N, т.е.
$\forall$ его координата – это многочлен $\le N$

№22. Найти
векторного
частная р
с правой

№22. Дайте определение векторного многочлена, векторного квазимногочлена. Докажите теорему о частном решении ЛНС с постоянными коэффициентами с правой частью в виде векторного квазимногочлена.

№23. Дайте определение автономной системы ОДУ. Докажите о кинематической интерпретации автономной системы (дайте определение фазового пространства, фазовой траектории, фазового портрета системы, положения равновесия системы, цикла). Докажите утверждения, касающиеся поведения фазовых траекторий автономной системы и их следствия

Автономные системы.

Опр. Автономная система – это нормальная система n-ого порядка, в правую часть которой переменная t не входит явно

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$G \subset \mathbb{R}^n$, G – область

$f(x)$, $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \in C(G)$, $i,j = 1,\dots,n$

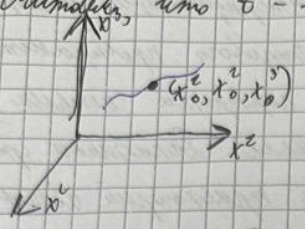
Тогда – теорема $\exists!$ из главы 2 – $\forall$ точка $(t_0, \bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 \in G$
$\exists!$ решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системы (1): $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{x}_0$

Пример автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = (x^1)^2 \\ \dot{x}^2 = 0 \\ \dot{x}^3 = \sin(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \\ \dot{x}^4 = \frac{e^{(\cdot)} x^3}{x^2} + 4 \end{cases}$$

Нормальная автономная система 4-ого порядка

Кинематическая интерпретация
Считаем, что t – время



Опр Мн-во $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$, где определена правая часть сис-мы (1) называется фазовым пр-вом системы (1)

Опр $\exists\ \bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ – решение сис-мы (1)
Кривая определяемая в фазовом пр-ве ур-нием $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$, называется фазовой траекторией системы (1)
Кривая или точка
Точка $\Leftrightarrow$ скорость равна нулю.
$\bar{x} = \bar{a}$ – траектория (1), если
$\bar{f}(\bar{a}) = 0$,
Такая точка называется стационарной $\ominus$
$\ominus$ полн. равновесие сис-мы = особая точка сис-мы

Св-ва фазовых траекторий сис-мы

Утв. 1
$\exists\ \bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ – реш сис-мы (1)
Тогда $\forall\ c \in \mathbb{R}$
$\bar{\psi}(t) = \bar{\varphi}(t+c)$ тж реш. сис-мы (1)

Док-во:

$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \bar{f}(\bar{\varphi}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}(t)$

$\frac{d\bar{\varphi}(t+C)}{d(t+C)} = \bar{f}(\bar{\varphi}(t+C))$

$\frac{d\bar{\varphi}(t+C)}{d(t+C)} = \frac{d\bar{\varphi}(t+C)}{dt} \cdot \frac{dt}{d(t+C)}$ (1)

$\dot{\bar{\varphi}}(t+C) = \bar{f}(\bar{\varphi}(t+C))$

$\bar{\varphi}(t) = \bar{f}(\bar{\varphi}(t))$ (t) ∈ D

Опр Мн-во всех фазовых траекторий системы называется фазовым портретом сис-мы.

Утв 2

Могут ли 2 фазовые траектории пересекаться?

Если две фазовые траект. автономной сис-мы пересекаются, то они совпадают

Док-во:

∃ фазовые траект. пересекаются, т.е. ∃ $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$\bar{\varphi}(t_1) = \psi(t_2)$

Рассмотрим решение $\bar{y}(t) = \bar{\varphi}(t + t_2 - t_1)$

$t_2 - t_1 = C = const \in \mathbb{R}$

$\bar{y}(t)$ – решение по утв. 1

$\bar{y}(t_2) = \bar{\varphi}(t_2 + t_2 - t_1) = \bar{\varphi}(t_1) = \bar{\psi}(t_2) \Rightarrow$ по т. ∃!;

$\bar{\psi}(t) = \bar{y}(t) \Rightarrow$ фазов. траект. соотв. $\bar{\varphi}$ $\bar{\psi}$ и $\bar{y}$ – совпадают

Опр Фазовая траектория называется ~~кривой~~ замкнутой (циклом), если (решение $\vec{\varphi}(t)$ называется периодическим), если

$\exists\, T>0:\ \vec{\varphi}(t+T)=\vec{\varphi}(t)\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

Утв 3.

$\vec{\varphi}(t)$ – реш сис-мы (2)

$\vec{\varphi}(t)\neq const$

и $\exists\, t_1\neq t_2:\ \vec{\varphi}(t_1)=\vec{\varphi}(t_2)$

Тогда реш $\vec{\varphi}$ является периодическим. Соотв. ему кривая – замкнутая кривая без самопересечений.

У решения $\exists$ min положительный период T.

Док-во:

$\exists\, t_2>t_1$

Докажем, что $\tilde{T}=t_2-t_1$ – период

Т-м $\vec{\psi}(t)=\vec{\varphi}(t+t_2-t_1)$

$\vec{\psi}(t_1)=\vec{\varphi}(t_2)=\vec{\varphi}(t_2)\Rightarrow \exists!$

$\Rightarrow \vec{\varphi}(t)=\vec{\psi}(t)\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

$\vec{\varphi}(t)=\vec{\varphi}(t+\tilde{T})$

Так как $\vec{\varphi}(t)\neq const \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{t}\neq t_1:\ \vec{\varphi}(\tilde{t})\neq\vec{\varphi}(t_2)$,

т.е. $u=|\vec{\varphi}(\tilde{t})-\vec{\varphi}(t_2)|\neq 0$

(длина вектора)

Т.к. $\vec{\varphi}$ – реш., то $\vec{\varphi}$ – непр. (даже диф.-ма)

Зафикс., $\vec{\varphi}$ непр в т. t_2:

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon)>0:\ \forall t\in\mathbb{R}\ |t-t_2|<\delta \Rightarrow$

$|\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(t_2)|<\varepsilon=u$

$t \in (t_2-\delta, t_2+\delta)$

$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_2)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{r}(t_2)| \neq \varepsilon$

$\Rightarrow \vec{r}(t) \neq \vec{r}(\tilde{t})$ ⇒

⇒ $\tilde{T} > 2\delta > 0$

$\Rightarrow \exists \inf \tilde{T} > 0$

и $\exists \inf \tilde{T} = T$ (надо док-ть, что T - период)

Если это inf, но не min, то $\exists T_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T$, т.е.

$\vec{r}(t+T_k) = \vec{r}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$k \to \infty$

$\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t) \Rightarrow T$ - min полож. период

ЧТД

Опр Циклом называется замкнутая фазовая траектория без самопересечений.

Вывод: Как выглядят фазовые траектории:

1) точка
2) замкнутая кривая без самопересечений
3) незамкнутая кривая без самопересечений

Фазовые портреты ЛОС 2-ого порядка

$\dot{x} = f(x)$, $n = 2$

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ ② $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Delta = \det A \neq 0$

Особые точки сис-мы ② $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$

$\exists!$ о.т. $(0,0)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$

№24 Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры для различных соотношений между характеристическими корнями (для каждого случая выпишите уравнение, примените теорему Пуанкаре и постройте интегральные кривые). Сформулируйте теорему Пуанкаре о классификации особых точек.

Фазовые портреты ЛОС 2-ого порядка

$\dot{x} = f(x)$, $n = 2$

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ ② $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Delta = \det A \neq 0$

Особые точки системы ② $\exists!$ о. т. $(0,0)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$ ③ $y' = \frac{d\frac{y}{x} + c}{b\frac{y}{x} + a}$

особая точка $(0,0)$

Фазовые траектории сис-мы ②

⇕

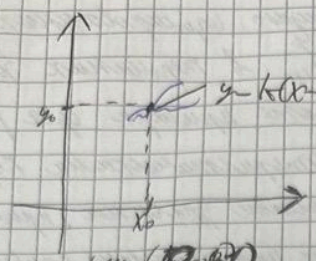
инт. кривые ур-ния ③

Опр Узлы ур-ния ③ – замк. интегральная кривая, не проходящая через о. т.

Опр Интегральная кар:

$\exists (x_0, y_0)$ о. т. ур-ния $\dot{y} = f(x,y)$

$\exists \varphi(x)$ – реш, входящее в о. т.



$y - k(x-x_0)$ $\quad k = \dot{f}(x_0)$

Направление $(1, k)$ или $(0, \pm 1)$ называется характеристическим для т. (x_0, y_0), если $\exists$ решение $y = \varphi(x)$, входящее в ок. т. (x_0, y_0): оно имеет касательную $y = k(x-x_0)$ в данной точке. (или верт. касат. в случае направления $(0, \pm 1)$)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + by \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Delta = \det A \neq 0$$

(матрица A невырожд.)

λ_1, λ_2 – собств. знач. м-цы $A \Rightarrow \lambda_{1,2} \neq 0$

Примеры

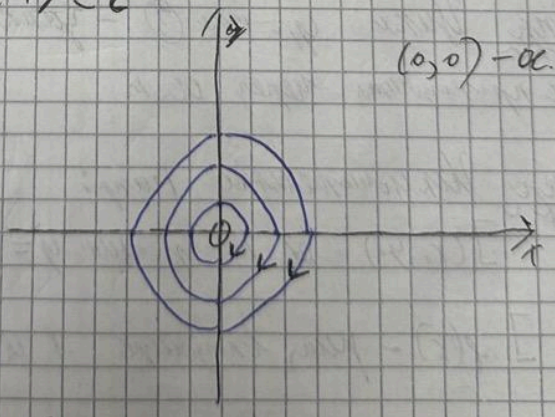
1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\Delta = 1 \neq 0$; $\lambda_{1,2} = \pm i$

$x^2 + y^2 = C$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$(0,0)$ – ц. т.

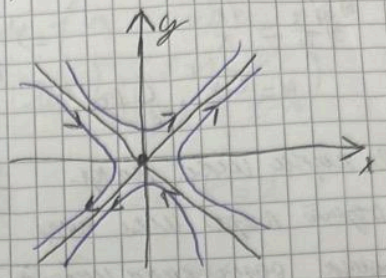
$(0,0)$ – центр



все инт. кривые – замкн. инж., кроме – нет

2) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta = -1$

$\lambda_{1,2} = \pm 1$



$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

1) –

2) –

3) $y\,dy = x\,dx$

$y^2 - x^2 = C$

$\exists$ 2 пары инц. напр.

по $\forall$ инц напр. в ос.т.

входит ровно 1 фазовая трактр. (1,1),

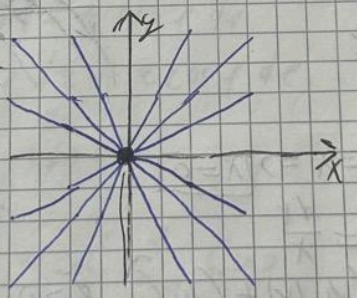
(1,-1), (-1,1), (-1,-1)

Циклов нету

Особая точка: седло

3) $\dot{y} = \frac{y}{x}$ $\dot{y} = \frac{cx + dy}{ax + by}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = 1$, $\lambda_{1,2} = 1$



дикритические узел

$\forall$ направление является исключительным

по $\forall$ направлению в ос.т входит ровно одна инт. кривая

Циклов нет

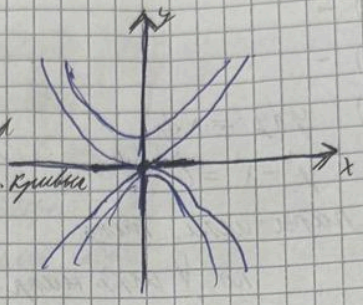
4) $y' = \frac{2y}{x}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda=1$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$

1) $y=0$
2) $x=0$
3) $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=Cx^2, C\in\mathbb{R} \\ x=0 \end{array} \right.$

$y=Cx^2$, $C\neq 0$



7 г парн. инт. кривых
по одной паре инт. кривых входит одна парабол. кривая
остальные – по другой
Циклов нет
Особая точка (0,0) – узел
все инт. кривые входят в ос. точку

5) $y' = \frac{x+y}{x}$

$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x+y \end{cases}$

$y = ux$; $y' = u'x+u$

$u'x+u = 1+u$

$u'x = 1$

1) –

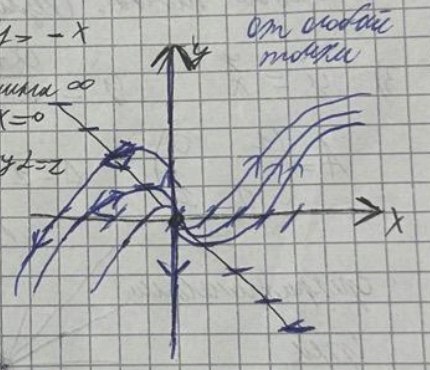
2) $\frac{dx}{du} = x \Rightarrow \boxed{x=0}$

3) $du = \frac{dx}{x}$

$u = \ln|x| + \ln\tilde{C}$, $\tilde{C}>0$

$y = x\ln(|x|\tilde{C})$

$\left[\begin{array}{l} y = x\ln Cx, Cx>0 \\ x=0 \end{array} \right.$



изоклина 0
$y=-x$
изоклина ∞
$x=0$
$y>0$ $0<y<2$

вырожденный узел

$\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

$\Rightarrow$ все инт. кривые входят в т. $(0,0)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$\lambda = 2,\ k = 2$

1 пара инж. напр.

все инт. крив. входят в одну точку

б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = 2$

$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 \Rightarrow$

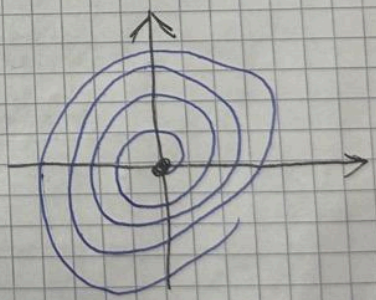
$\Rightarrow \lambda = 1 \pm i$

$\begin{cases} \dot{x} = r\cos\varphi \\ \dot{y} = r\sin\varphi \end{cases}$ $r > 0;\ \varphi \in [0; 2\pi)$

$\begin{cases} dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \end{cases}$

$\frac{dr}{d\varphi} = r,\ r \neq 0$

$\frac{dr}{r} = d\varphi$ $r = Ce^{\varphi},\ C > 0$



Особая точка – фокус

неск. напр. –

циклов –

Теорема Пуанкаре (о классиф. о. точек)

② $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ $a, b, c, d = \text{const} \in \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\Delta = \det A \neq 0$,

λ_1, λ_2 – с. з. м-цы A.

Тогда о. т. системы ② имеет след. тип:

1) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, разных знаков: седло

2) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, одного знака, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: узел

3) $\lambda_1 = \lambda_2$ вырожд. или дикритический узел

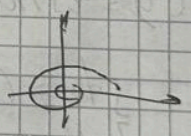
4) $\lambda_{1,2} = \pm bi$, $b \in \mathbb{R}$ (чисто мнимые): центр

5) $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a \neq 0$: фокус

канон. $k = \frac{a+d}{b}$, $r = Ce^{-\frac{b}{m}t}$, $C > 0$, $m > 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $k = \frac{1+1}{-1} = -2$

определяет направление у фокуса $r = Ce^{\frac{\pm 2t}{m}}$



$k > 0$

φ увел., $r(\varphi)$ увел.

$k < 0$

φ увел., $r(\varphi)$ умен.



25. Дайте определение устойчивого по Ляпунову решения системы. Дайте определение асимптотически устойчивого по Ляпунову решения системы. Приведите примеры исследования устойчивости решения системы по определению. Приведите пример уравнения, у которого существуют как устойчивое, так и неустойчивое решение.

Устойчивость

Основные понятия

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$ (1)

$G \subset \mathbb{R}^{n+2}$, G – область $\bar{f}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \in C(G)$

$\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $(\bar{x}_0, t_0) \in G$

$\exists!$ реш. з. Коши

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(x, t) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases} \leftarrow \bar{\varphi} \text{ – решение}$$

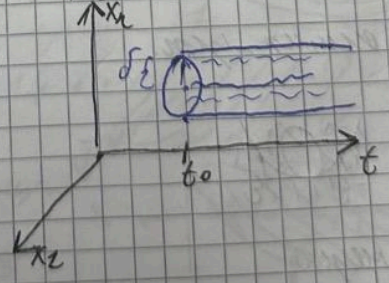
Опр. Решение $\bar{\varphi}(t)$ сис-мы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

1) $\forall$ решение $\bar{x}(t)$: $|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$ x_0 // t_0

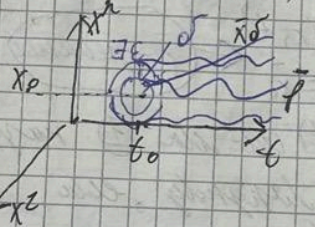
неограниченно продолжаемо вправо

2) $|\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

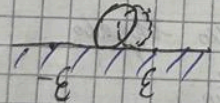


Опр Решение $\bar{\varphi}$ з. Коши ① ② называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно уст. по Ляпунову (вып 1, 2)
и
3) $\exists \Delta > 0 : \forall \bar{x}$ - решение сис-мы ①:
$|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \Delta$ верно, что
$$\lim_{t \to +\infty} |\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)| = 0$$

Опр Решение $\bar{\varphi}(t)$ неустойчиво по Ляпунову, если
$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists$ решение $\bar{x}(t)$ сис-мы ①:
$|\bar{x}_\delta(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$, то
1) либо оно не явл. непр. прод. вправо;
2) либо $\exists\, t_\delta > t_0 : |\bar{x}_\delta(t_\delta) - \bar{\varphi}(t_\delta)| \geq \varepsilon$

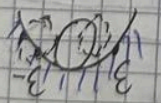


Пример устойчивого решения

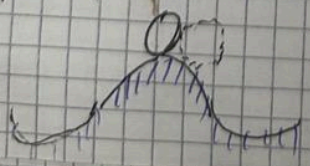


(шарик на плоскости)

Пример асимпт. уст.

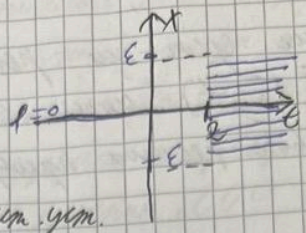


Пример неуст.



Примеры

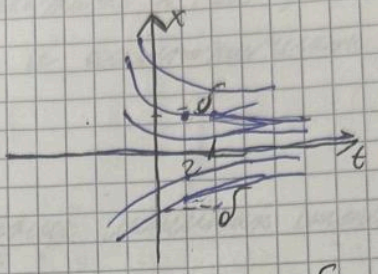
1) $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ x(2) = 0 \end{cases}$ $x = C$



$\ell = 0$ – устойчиво,

$\boxed{\delta = \varepsilon}$ не явл. асимпт. уст.

2) $\begin{cases} \dot{x} = ax, & a < 0 \\ x(2) = 0 \end{cases}$

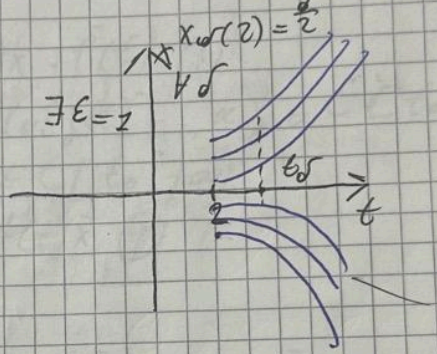


$x = Ce^{at}$

$\ell = 0$

асимпт. устойчиво

3) $\begin{cases} \dot{x} = ax, & a > 0 \\ x(2) = 0 \end{cases}$



$x = Ce^{ax}$

$\ell = 0$

неустойчиво

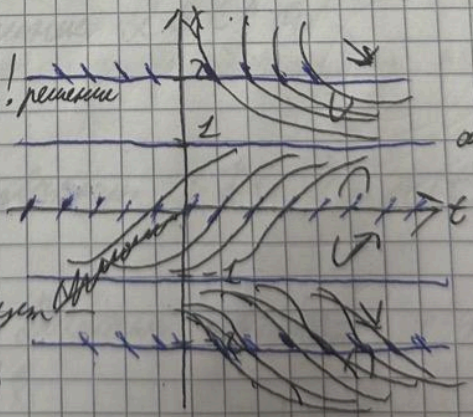
4) Пример ур-ния, у которого есть как устойчивое, так и неустойчивое решение

$\dot{x} = 1 - x^2$,

$x = \pm 1$

Через $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$ проходит 1 решение

особых точек нет



-2 1

$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}(1 - x^2) \ominus$

$\ominus -2x \cdot \dot{x} = -2x \cdot (1 - x^2) \ominus$

$\ominus 2x \cdot (x^2 - 1)$

-2 0 2

Замечание

Исследование уст-ти решения $\bar{x}$ сис-мы $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$ можно свести к иссл. нулевого решения преобразованной системы.

Док-во:

№26. Докажите, что решения ЛНС устойчивы (асимптотически устойчивы) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) нулевое решение ЛОС. Сформулируйте теорему об условии устойчивости нулевого решения ЛОС с постоянными коэффициентами и докажите в ней достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения.

Устойчивость решений линейных систем.

Рассмотрим ЛНС

$$\dot{\bar{x}} = A(t)x + \bar{f}(t) \quad (3)$$

$$A(t) = (a_{ij}(t)), \quad a_{ij} \in C[t_0; +\infty)$$

$$\bar{f}(t) \in C[t_0; +\infty)$$

соотв. ЛОС: $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ (4)

Утв

Все решения ЛНС (3) $\forall$ ф-ции $\bar{f}(t)$

а) устойчиво $\Leftrightarrow$ устойчиво нулевое решение ЛОС (4)

б) асимптотически устойчиво $\Rightarrow$ асимптотически устойчиво нулевое решение ЛОС (4)

Док-во:

а) Рассмотрим фиксированное ЛНС $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t)$ и её решение $\bar{\varphi}(t)$

$\exists \bar{\varphi}$ устойчиво. Докажем, что $\bar{y} = 0$ – устойчивое решение ЛОС $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall$ реш $\bar{x}(t)$ ЛНС:

$|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)| < \delta$ верно, что

все реш. такой л.н.с неогр. прод. вправо

1) $\forall$ реш. неогр. прод. вправо

2) $|\bar{x}(t) - \bar{p}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$

$\Downarrow \bar{x}_{0н} = \bar{x}_{нн} + \bar{x}_{0.о}$

$|\bar{y}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$

$|\bar{y}(t_0)| < \delta$

$\bar{y}$ - реш. л.о.с

$|y(t_0) - \bar{\psi}(t_0)| < \varepsilon \qquad |\bar{y}(t) - \psi(t)| < \varepsilon$

$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$

$0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0$

б) $\exists \bar{y}$ ас. уст. реш. л.н.с

Д-м, что $\bar{\psi} = 0$ ас. уст. реш. л.о.с

1)+2) - опр. уст. (см. пункт а)

3) докажем, что $\exists \Delta > 0$:

$\forall \bar{x}$ - реш л.н.с: $|\bar{y}(t_0) - 0| < \psi(t_0)$

$\|$

$|\bar{x}(t_0) - \bar{p}(t_0)| < \Delta$

$\lim\limits_{t \to +\infty} |\bar{x}(t) - \bar{p}(t)| = 0$

$|\bar{y}(t) - 0| \le \psi(t)$

Вывод: у л.с не может $\exists$-ть устойчивого реш., если одно из решений неуст. $\Rightarrow$ говорят об устойчивости линейной с-мы.

Устойчивость ЛОС с пост. коэфф.

Теорема

Рассмотрим ЛОС

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, где A - м-ца размера $n \times n$

(a_{ij})

$a_{ij} = const \in \mathbb{R}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - с.з. м-цы A

Тогда

1) если все $Re\,\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, m$, то нулевое решение асимптотически устойчиво;

2) если все $Re\,\lambda_j \le 0$, и $\forall \lambda_s: Re\,\lambda_s = 0$ соответ. жордановы клетки размера 1×1, то нулевое решение устойчиво

3) если

$\exists\, \lambda_s: Re\,\lambda_s > 0$

или

$\exists\, \lambda_s: Re\,\lambda_s = 0$ и ~~если~~ хотя бы соотв. жорд. клетка ~~есть~~ размера $\ge 2 \times 2$, то нулевое решение неустойчиво

Док-во:

1) $\exists\, Re\,\lambda_j < 0$, $\forall\, j = 1, \dots, m$

$\bar{x} = c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n(t)$

$\bar{x} = X(t)\,\bar{c}$, $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ — столбец

$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

t_0: $\bar{X}(t_0) = E$

$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

$x(t_0) = \bar{X}(t_0) \cdot \bar{c} = E \cdot \bar{c} = \bar{c}$

$\bar{x}(t) = \bar{X}(t)\,\bar{x}(t_0)$ при $t \to +\infty$ ничего не сходится

элементы фундаментальной м-цы – это функции $e^{\alpha t} P(t) \cos t$, $e^{\alpha t} P(t) \sin t$, $e^{\alpha t} P(t)$