БИЛЕТ 30

Исключительные направления, Пуанкаре-Перрон и Лотка-Вольтерра

Источники: сборник, с. 130-133; соответствующая часть лекций недоступна

Объём ответа: Определения, безопасная формулировка и применение теоремы; полный разбор модели

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Линейная классификация объясняет, какие рисунки возникают из экспонент и жордановых цепочек. Теперь нужны два перехода: описать тип особой точки геометрически и выяснить, когда линейный рисунок действительно отражает нелинейную систему. Модель хищника и жертвы показывает границу метода: в точке сосуществования линейная часть имеет центр, но замкнутость настоящих траекторий нужно обосновать отдельно.

Основной план ответа: дать корректное определение направления подхода, перечислить типы, сформулировать локальную теорему с условиями, исследовать два равновесия модели и построить положительные траектории. Не стоит пытаться получить весь портрет только по собственным значениям одной точки.

Особая точка и исключительное направление

Для $\dot{z} = F(z)$ на плоскости точка a особая, если $F(a) = 0$. Она изолирована, если в некоторой её окрестности других равновесий нет. Предполагаем достаточную гладкость для локальной единственности.

Единичное направление e называется *исключительным направлением подхода к* a, если существует непостоянная траектория $z(t)$ и соответствующий конец времени, такие, что

$$z(t) \longrightarrow a, \qquad \frac{z(t) - a}{\|z(t) - a\|} \longrightarrow e.$$

Для гладкой системы, если траектория подходит к внутреннему равновесию, этот конец времени бесконечен: $t \to +\infty$ для входящих и $t \to -\infty$ для выходящих ветвей. Часто противоположные лучи e и $-e$ объединяют в одно *неориентированное направление*; нужно явно сказать, что именно считается.

Определение через $\frac{y}{x} \to \tan\theta$ недостаточно: оно исключает вертикальные направления, не требует самого приближения к точке и фиксирует лишь одну половину времени.

Нормированный вектор устраняет все три проблемы. Для типичных гладких узлов и сепаратрис предельный луч совпадает с касательным направлением кривой у равновесия.

Геометрические типы

- *Узел*: все достаточно близкие непостоянные траектории подходят к точке в одном направлении времени и имеют предельные направления. У обычного линейного узла с различными корнями есть две собственные прямые: почти все траектории касаются медленного собственного направления, а две ветви сильного направления выделены. У вырожденного узла одна собственная прямая, по которой касаются все подходящие ветви. У дикритического узла возможны все направления. Поэтому описание обычного узла нельзя выдавать за определение всех узлов.
- *Седло*: локально имеются две входящие и две выходящие сепаратрисные ветви; их предельные направления задаются двумя различными касательными прямыми. Прочие близкие траектории проходят через седловые секторы и не стремятся к точке, оставаясь всё время в малой окрестности. У глобальной системы две локальные ветви могут соединиться вдали, поэтому подсчитывают именно локальные ветви.
- *Фокус*: соседние траектории спирально подходят к точке или удаляются от неё, совершая бесконечно много оборотов. Нормированное направление не имеет предела, исключительных направлений нет. Устойчивый фокус притягивает при $t \to +\infty$, неустойчивый — при обратном времени.
- *Центр*: достаточно малая проколотая окрестность заполнена замкнутыми траекториями, окружающими точку. Отдельная траектория не подходит к равновесию, поэтому исключительных направлений нет. Отсутствие направлений само по себе не отличает центр от фокуса: нужно установить замкнутость или спиральное приближение.

Цикл — любая непостоянная периодическая орбита; *предельный цикл* дополнительно изолирован среди циклов. Семейство окружностей вокруг центра не состоит из предельных циклов.

Теорема Пуанкаре-Перрона: условия и границы

Рассмотрим в окрестности нуля

$$\dot{z} = Az + R(z), \qquad R(0) = 0, \quad DR(0) = 0.$$

Ниже используется достаточно сильная гладкая версия: поле принадлежит C^2 в окрестности нуля, поэтому $R(z) = O(\|z\|^2)$. Это проверенная достаточная формулировка для применения, а не заявление о дословном тексте отсутствующей лекции.

Если оба собственных значения A имеют ненулевые вещественные части, равновесие гиперболично. Локальная качественная классификация по линейной части сохраняется:

1. два вещественных корня разных знаков дают нелинейное седло; сепаратрисы касаются собственных направлений матрицы A;
2. два вещественных корня одного знака дают узловое поведение: при отрицательном знаке равновесие притягивает, при положительном отталкивает;

3. комплексные корни с ненулевой вещественной частью дают фокус с соответствующей устойчивостью.

Речь идёт о локальном качественном поведении, а не о буквальном совпадении кривых. Нелинейные сепаратрисы обычно не прямые, и формулы линейных траекторий не становятся точными решениями нелинейной системы.

Для различных вещественных корней и комплексной пары основные выводы применяются уже при более слабой регулярности. Однако одно условие $R = o(\|z\|)$ без уточнения гладкости не следует использовать для безоговорочного переноса всей тонкой геометрии повторного узла. Безопасно отдельно применять теорему первого приближения к устойчивости, а повторный геометрический случай рассматривать в рамках явно названных достаточных условий. Все конкретные применения ниже имеют полиномиальные правые части и этим требованиям удовлетворяют.

Если есть нулевая вещественная часть, теорема в указанном виде не даёт классификации. Чисто мнимая пара может сопровождаться центром либо устойчивым или неустойчивым слабым фокусом; эти примеры не исчерпывают всех возможных вырожденных ситуаций. Нулевой корень также требует самостоятельного анализа. Доказательство теоремы Пуанкаре-Перрона в охват этого билета не включено.

Пример применения

Для системы

$$\dot{x} = -x + y^2, \qquad \dot{y} = x - 2y + x^3$$

ноль — равновесие, поле полиномиально, а

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad R(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = O(x^2 + y^2).$$

Корни -1 и -2 различны и отрицательны: ноль — устойчивый узел, в частности локально асимптотически устойчив. Собственное направление для медленного корня -1 задаётся $y = x$, для -2 — $x = 0$. Нелинейная сильная входящая кривая касается второго направления, а остальные достаточно близкие входящие траектории касаются первого. Это касательные у равновесия; утверждать, что обе прямые целиком инвариантны, нельзя без подстановки в нелинейное поле.

Модель Лотки-Вольтерры: постановка

Пусть x — численность жертв, y — численность хищников. Классическая модель

$$\dot{x} = \alpha x - \gamma xy, \qquad \dot{y} = -\beta y + \delta xy, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

описывает рост жертв без хищников, их убыль при встречах, вымирание хищников без пищи и рост хищников при наличии жертв. Рассмотрим требуемый частный случай всех параметров, равных единице:

$$\dot{x} = x(1 - y), \qquad \dot{y} = y(x - 1).$$

Биологическая область — $x, y \geq 0$; для первого интеграла ниже понадобится строгая положительность.

Положительный квадрант инвариантен. На любом промежутке существования

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} (1 - y(s))\, ds\right), \quad y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} (x(s) - 1)\, ds\right),$$

поэтому положительные начальные значения не меняют знак. Оси тоже инвариантны и должны исследоваться отдельно от логарифмического первого интеграла.

Равновесия и линеаризация

Из $x(1 - y) = 0$, $y(x - 1) = 0$ получаем только $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Матрица Якоби:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}.$$

В нуле она равна $\operatorname{diag}(1, -1)$: это седло. На положительной полуоси x имеем $x' = x$, движение от начала; на положительной полуоси y имеем $y' = -y$, движение к началу. В полной плоскости это части четырёх сепаратрисных ветвей, а в биологическом квадранте видны две.

В точке $(1, 1)$ положим $\xi = x - 1$, $\eta = y - 1$. Тогда

$$\dot{\xi} = -\eta - \xi\eta, \qquad \dot{\eta} = \xi + \xi\eta, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни $\pm i$ дают линейный центр, но это критический случай. Теорема Пуанкаре-Перрона ещё не доказывает центр исходной системы.

Дополнительный строгий вывод: первый интеграл

Следующее доказательство замкнутости дополняет краткое рассуждение о симметрии в сборнике; оно не приписывается отсутствующей лекции. В положительном квадранте положим

$$H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y.$$

По правилу цепочки

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) x(1 - y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) y(x - 1) \\ &= (x - 1)(1 - y) + (y - 1)(x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому каждая положительная траектория лежит на уровне $H = h$. Функция $q(s) = s - \ln s$ имеет единственный минимум $q(1) = 1$, строго убывает до 1 и возрастает после 1; при $s \to 0+$ и $s \to \infty$ она стремится к бесконечности. Отсюда:

- $H \geq 2$, причём $H = 2$ только в $(1, 1)$;
- каждый подуровень $H \leq h$ компактен и отделён от осей;
- при $h > 2$ градиент $\nabla H = (1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y})$ нигде на уровне не равен нулю.

Остаётся обосновать, что уровень — одна замкнутая кривая, а не просто ограниченное множество. Гессиан H равен diag$(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2})$ и положительно определён, поэтому H строго выпукла. На каждом луче из $(1,1)$, пока он остаётся в положительном квадранте, функция строго возрастает после начального минимума и стремится к бесконечности у конца луча или на бесконечности. Каждый такой луч пересекает $H = h > 2$ ровно один раз. Регулярность уровня и этот радиальный параметр показывают, что он является гладким простым замкнутым овалом вокруг $(1,1)$.

На овале поле не обращается в ноль, поскольку единственное положительное равновесие имеет $H = 2$. Оно касается овала вследствие $\dot{H} = 0$. Скорость непрерывна и на компактном овале ограничена снизу положительным числом. Следовательно, движение обходит весь овал за конечное время: период можно записать как

$$T(h) = \oint_{H=h} \frac{ds}{\|F(x,y)\|},$$

где ds — элемент длины дуги. Интеграл конечен; после возвращения к начальной точке единственность даёт периодичность. Компактность уровня одновременно исключает конечный взрыв и гарантирует продолжение движения в обе стороны на всю прямую. Так доказано: каждая положительная неравновесная траектория — периодический овал, а $(1,1)$ — центр.

Как нарисовать портрет без догадок

Нулевые изоклины — $x = 1$ для $\dot{y} = 0$ и $y = 1$ для $\dot{x} = 0$, а также оси. В четырёх областях положительного квадранта:

- $x > 1$, $y < 1$: движение вправо и вверх;
- $x > 1$, $y > 1$: влево и вверх;
- $x < 1$, $y > 1$: влево и вниз;
- $x < 1$, $y < 1$: вправо и вниз.

Получается обход против часовой стрелки. Например, в точке $(1,2)$ поле равно $(-1,0)$, движение влево; в $(2,1)$ оно равно $(0,1)$, движение вверх. Рисуют седло в начале, стрелки на осях, центр $(1,1)$ и несколько вложенных овалов $H = h$. Овалы не обязаны быть эллипсами; периоды нелинейных колебаний также не обязаны равняться 2π для всех уровней. Число 2π относится к малым колебаниям линейной части.

Ответ у доски

Определить направление нормированным вектором и разрешить оба бесконечных конца времени. Различить обычный, вырожденный и дикритический узлы. Сформулировать локальную теорему с гиперболичностью и условиями гладкости. Для Лотки-Вольтерры найти обе точки, построить Якоби, назвать седло и объяснить критичность $(1,1)$. Затем вычислить $\dot{H} = 0$, описать компактные регулярные уровни и стрелки. Последний шаг даёт центр строго, независимо от неполного аргумента симметрии.

Проверка себя

1. Сколько исключительных лучей у линейного седла? *Ответ:* четыре, образующие две неориентированные собственные прямые; две ветви входящие, две выходящие.
2. Почему у устойчивого фокуса нет исключительного направления, хотя траектории стремятся к нулю? *Ответ:* их нормированные радиус-векторы продолжают вращаться и не имеют предела.
3. Может ли положительное решение единичной модели Лотки-Вольтерры стремиться к $(1, 1)$, если начинается в другой точке? *Ответ:* нет. Его значение $H > 2$ постоянно, тогда как в $(1, 1)$ оно равно 2.
4. Найдите первый интеграл общей модели. *Ответ:* $H = \delta x - \beta \ln x + \gamma y - \alpha \ln y$; дифференцирование даёт ноль. Точка сосуществования $(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma})$.

Частые ошибки

Не определять направление одним отношением $\frac{y}{x}$. Не описывать все узлы только рисунком с двумя разными корнями. Не называть каждый цикл предельным. Не делать вывод о нелинейном центре из чисто мнимых корней. Не применять H на осях: там логарифмы не определены. Симметрия портрета полезна для проверки рисунка, но сама по себе без дополнительного аргумента не заменяет доказательство, что все положительные траектории замкнуты.