БИЛЕТ 29

Устойчивость по первому приближению

Источники: сборник, с. 129; соответствующая часть лекций недоступна

Объём ответа: Формулировка теоремы и полные применения; доказательство самой теоремы не требуется

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Рядом с равновесием гладкое поле раскладывается на линейную часть и остаток меньшего порядка. Если линейная часть уверенно сжимает все направления, малый нелинейный остаток не отменяет локальное притяжение. Если существует уверенно растущее направление, нелинейность меньшего порядка не устраняет неустойчивость. На границе, когда линейная часть не растёт и не затухает в каком-то направлении, именно отброшенный остаток может решить всё.

Поэтому метод первого приближения силён в некритических случаях и намеренно даёт неполный ответ в критических. Фраза «по линейной системе центр, следовательно, и по нелинейной центр» не является допустимым применением теоремы. Устойчивость и геометрический тип также нужно различать: данный билет прежде всего отвечает на вопрос об устойчивости.

Точная формулировка: автономный случай

Пусть $\dot{u} = F(u)$, где $F \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ в открытой окрестности равновесия a, $F(a) = 0$. После замены $v = u - a$ имеем

$$\dot{v} = Av + R(v), \qquad A = DF(a), \qquad \frac{\|R(v)\|}{\|v\|} \longrightarrow 0 \quad (v \to 0).$$

Линейная система $\dot{v} = Av$ называется системой первого приближения.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

1. Если все собственные значения A имеют строго отрицательные вещественные части, равновесие a нелинейной системы локально асимптотически устойчиво.
2. Если хотя бы одно собственное значение A имеет строго положительную вещественную часть, равновесие a неустойчиво.
3. Если положительных вещественных частей нет, но хотя бы одна равна нулю, эти два пункта не дают заключения. Требуется исследовать нелинейные члены или применять другой метод.

В пункте 2 остальные корни могут иметь любые вещественные части, в том числе нулевые. В пункте 1 допускаются кратные корни и любые жордановы клетки. Утверждение локальное: отрицательные корни в одной точке не означают притяжения всех решений из всей области.

Вариант с явно зависящим от времени остатком

В сборнике записана также система

$$\dot{v} = Av + R(t, v), \qquad t \geq t_0,$$

с постоянной A. Для применения аналогичного результата нужно, чтобы $R(t, 0) = 0$, выполнялись условия локального существования и единственности, а малость остатка была *равномерной по времени*. Удобная достаточная запись:

$$\|R(t, v)\| \leq \omega(\|v\|)\|v\|, \qquad \omega(r) \longrightarrow 0 \quad (r \downarrow 0),$$

для всех $t \geq t_0$ и всех достаточно малых v. Функция ω не зависит от t. Можно предполагать непрерывность R и его частных производных по v в такой трубке. При этих гипотезах действуют те же строгие спектральные выводы. Для обычных автономных задач равномерность обеспечивается отсутствием времени в остатке.

Это условие нельзя заменять только поточечной малостью $R(t, v) = o(\|v\|)$ при каждом фиксированном t. Дополнительный проверочный пример:

$$\dot{u} = -u + e^t u^2, \qquad t \geq 0.$$

Линейная часть равна $-u$, но коэффициент квадратичного остатка неограниченно растёт. Для $u_0 > 0$ подстановка $w = \frac{1}{u}$ даёт $w' = w - e^t$, откуда

$$u(t) = \frac{e^{-t}}{u_0^{-1} - t}, \qquad 0 \leq t < u_0^{-1}.$$

Сколь угодно малое положительное начальное состояние в итоге выходит из фиксированной окрестности и имеет конечный взрыв. Таким образом, ноль неустойчив; противоречия с теоремой нет, поскольку равномерная малость нарушена. Этот пример служит пояснением условий, а не обязательным доказательством билета.

Алгоритм применения

1. Решить $F(a) = 0$ и убедиться, что выбранная точка действительно равновесная. Названная в условии точка может требовать проверки.
2. Проверить гладкость поля в её окрестности. Корни, модули и знаменатели требуют отдельного внимания к области определения.
3. Выписать матрицу Якоби $DF(u)$ и подставить именно равновесие a.
4. При необходимости явно сделать сдвиг $v = u - a$; линейное приближение записывается относительно нулевого отклонения, а не относительно старых координат.
5. Вычислить спектр и выбрать допустимый вывод. Если случай критический, так и сказать, не подменяя отсутствие заключения утверждением об устойчивости.

В размерности два отрицательность вещественных частей эквивалентна условиям $\operatorname{tr} A < 0$ и $\det A > 0$. Неустойчивость следует, например, при $\det A < 0$, поскольку тогда корни вещественны и разных знаков. Для вывода именно о седле или фокусе используют локальную классификационную теорему следующего билета, а не только теорему об устойчивости.

Пример из сборника с проверкой знака

Рассмотрим

$$\dot{x} = \sin x, \qquad \dot{y} = \cos y.$$

Все равновесия имеют вид

$$x = k\pi, \qquad y = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Матрица Якоби равна

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

В точке $(0, \frac{\pi}{2})$ она равна $\operatorname{diag}(1, -1)$. Есть положительный корень, следовательно, равновесие неустойчиво.

Проверим сдвиг подробно: $\xi = x$, $\eta = y - \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\dot{\xi} = \sin \xi = \xi + O(\xi^3), \qquad \dot{\eta} = \cos(\frac{\pi}{2} + \eta) = -\sin \eta = -\eta + O(\eta^3).$$

Линейная часть второго уравнения имеет *минус*; запись $\dot{y} = y - \frac{\pi}{2}$ была бы ошибочной. Остаток имеет норму $O(\|(\xi, \eta)\|^3) = o(\|(\xi, \eta)\|)$, поэтому условия выполнены.

В точке $(\pi, \frac{\pi}{2})$ матрица равна $\operatorname{diag}(-1, -1)$, и равновесие локально асимптотически устойчиво. В общей точке спектр равен $((-1)^k, -(-1)^m)$. Асимптотическая устойчивость имеет место, когда k нечётно и m чётно; во всех остальных комбинациях есть положительный корень и равновесие неустойчиво. Так одна формула Якоби исследует целое семейство точек.

Почему критический случай действительно неопределён

У трёх уравнений

$$\dot{u} = -u^3, \qquad \dot{u} = u^3, \qquad \dot{u} = 0$$

одинаковая линейная часть $A = 0$. В первом случае

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 2u_0^2 t}}$$

существует на полуоси, удовлетворяет $|u(t)| \le |u_0|$ и стремится к нулю: ноль асимптотически устойчив. Во втором случае модуль любого ненулевого малого решения растёт, а формула имеет знаменатель $\sqrt{1 - 2u_0^2 t}$: ноль неустойчив. В третьем случае ноль устойчив без притяжения. Один и тот же спектр даёт три разных ответа из-за нелинейных членов.

Аналогично при чисто мнимых корнях на плоскости к вращению можно добавить радиальные члены с $r' = -r^3$ или $r' = r^3$. Получатся притягивающие либо отталкивающие спирали с одной и той же линейной частью центра. Это подготавливает осторожное применение теоремы Пуанкаре-Перрона.

Ответ у доски

Записать $F(a) = 0$, сдвиг и $A = DF(a)$. Сформулировать два строгих спектральных пункта и критическую оговорку. Указать, что остаток имеет меньший порядок; при зависимости от времени — равномерно. Разобрать пример $\sin x, \cos y$, не потеряв минус после сдвига. Само доказательство теоремы в охват этого билета не включено; вычисление линейной части и проверка условий должны быть полными.

Проверка себя

1. Исследуйте ноль системы $\dot{x} = -x + y^2$, $\dot{y} = -2y + x^3$. *Ответ:* $A = \mathrm{diag}(-1, -2)$, ноль локально асимптотически устойчив.
2. Что даёт первое приближение для $\dot{u} = -u^3$? *Ответ:* ничего; $A = 0$. Асимптотическая устойчивость доказывается отдельно по явному решению.
3. Исследуйте $\dot{x} = x - x^3$, $\dot{y} = -y$. *Ответ:* равновесия $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$. В нуле спектр $(1, -1)$, неустойчивость; в двух остальных точках $(-2, -1)$, асимптотическая устойчивость.
4. Достаточно ли $\det DF(a) > 0$ для устойчивости? *Ответ:* нет; например, $A = E$ имеет положительный определитель, но равновесие неустойчиво.

Частые ошибки

Не исследовать произвольную точку как равновесие без подстановки. Не считать, что «малый остаток» означает малость только при одном времени. Не приписывать теореме заключение для нулевых вещественных частей. Не путать локальную асимптотическую устойчивость с глобальным притяжением. Наличие одного отрицательного корня не компенсирует положительный корень в другом направлении.