БИЛЕТ 28

Устойчивость линейных систем и спектральный критерий

Источники: сборник, с. 126-128; фотографии тетради, вопрос 26

Объём ответа: Полное доказательство сведения ЛНС к ЛОС и всех направлений спектрального критерия

Доработка по фотографиям: вопрос 26

IMG_2024–IMG_2027; главы 28.

Что требуется. Сведение ЛНС к ЛОС; спектральный критерий; обязательно дописать достаточность, оборванную на фото.

Если φ решает $u' = A(t)u + f(t)$, разность $z = u - \varphi$ решает $z' = A(t)z$. Поэтому устойчивость каждого решения ЛНС равносильна устойчивости нулевого решения ЛОС. Нелинейный пример с одновременно устойчивым и неустойчивым равновесиями нельзя переносить на одну линейную систему.

Для постоянной A положим $s = t - t_0 \geq 0$ и запишем $z = e^{As}z_0$. В жордановой клетке $J = \lambda E + N$, $N^k = 0$:

$$e^{Js} = e^{\lambda s}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{s^r N^r}{r!}.$$

Если все $\operatorname{Re}\lambda < 0$, каждое слагаемое стремится к нулю и ограничено. После перехода обратно к исходному базису найдётся $M \geq 1$ с $\|e^{As}\| \leq M$. Выбираем $\delta = \varepsilon/M$: это устойчивость. Стремление матрицы к нулю даёт притяжение всех малых начальных отклонений, то есть асимптотическую устойчивость.

Если все вещественные части неположительны, а все клетки на мнимой оси имеют размер один, соответствующие экспоненты ограничены, отрицательные блоки затухают. Та же оценка с M доказывает устойчивость. При наличии собственного значения на мнимой оси притяжения всех отклонений нет.

Полный критерий: положительная вещественная часть даёт растущую экспоненту; клетка размера хотя бы два на мнимой оси даёт растущий полиномиальный множитель. В обоих случаях сколь угодно малые начальные данные вдоль растущей моды выходят из фиксированной окрестности. Для комплексных мод берём действительную или мнимую часть. Требование тетради — доказать достаточность; необходимость оставлена здесь как объяснение полного критерия.

Понять смысл

В линейной неоднородной системе внешнее воздействие одинаково для сравниваемых решений. При вычитании оно исчезает, поэтому рост ошибки определяется только однородной

системой. Отсюда важный вывод: у одной линейной системы нельзя получить одно устойчивое и другое неустойчивое решение при одинаковом начальном моменте и одном понятии устойчивости.

Для постоянной матрицы вопрос сводится к росту e^{At}. Экспонента с отрицательной вещественной частью затухает даже после умножения на любой многочлен. На мнимой оси экспонента сама не растёт, но присоединённые векторы добавляют степени t и могут разрушить устойчивость. Поэтому одних знаков вещественных частей недостаточно: в граничном случае нужна жорданова структура.

Связь ЛНС и ЛОС: формулировка

Пусть $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t \geq t_0$. Рассмотрим

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \qquad \dot{v} = A(t)v.$$

Линейные решения определены на всей правой полуоси. Любое решение φ ЛНС устойчиво тогда и только тогда, когда нулевое решение ЛОС устойчиво. То же верно для асимптотической устойчивости. Здесь устойчивость понимается относительно возмущений начального состояния, а не относительно произвольных изменений функции f.

Доказательство сведения к разности

Для любого решения u ЛНС положим $v = u - \varphi$. Тогда

$$\dot{v} = \dot{u} - \dot{\varphi} = (A(t)u + f(t)) - (A(t)\varphi + f(t)) = A(t)v.$$

Обратно, любое решение v ЛОС даёт решение $u = \varphi + v$ ЛНС. Это взаимно однозначное соответствие, причём

$$v(t_0) = u(t_0) - \varphi(t_0), \qquad \|v(t)\| = \|u(t) - \varphi(t)\|.$$

Следовательно, условие «начальное отклонение меньше δ, будущее отклонение меньше ε» буквально совпадает для двух задач. Совпадает и условие $\|v(t)\| \to 0$. Устойчивость, а затем устойчивость вместе с притяжением переносятся в обе стороны с теми же радиусами. Доказательство не требует постоянства A и не требует ограниченности f.

Точная спектральная теорема

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ постоянна. Тогда нулевое решение $\dot{u} = Au$:

1. асимптотически устойчиво *тогда и только тогда*, когда все собственные значения удовлетворяют $\operatorname{Re}\lambda < 0$;
2. устойчиво *тогда и только тогда*, когда $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ для всех λ, а все собственные значения на мнимой оси полупросты, то есть их жордановы клетки имеют размер один;
3. неустойчиво, если существует корень с положительной вещественной частью либо имеется клетка размера не меньше двух для корня с нулевой вещественной частью.

Устойчивость *без* асимптотической устойчивости означает второй случай и дополнительное наличие хотя бы одного корня на мнимой оси. Если таких корней нет, второй критерий также выполнен, но система асимптотически устойчива.

Лемма: устойчивость равносильна ограниченности оператора перехода

Пишем $s = t - t_0 \geq 0$ и $u(t) = T(s)u_0$, где $T(s) = e^{As}$. Если $\|T(s)\| \leq M$ при всех $s \geq 0$, то выбор $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ даёт

$$\|u(t)\| \leq M\|u_0\| < \varepsilon.$$

Обратно, пусть ноль устойчив. Для $\varepsilon = 1$ найдём $\delta > 0$. Для каждого единичного вектора z начальное состояние $(\frac{\delta}{2})z$ даёт $\|T(s)(\frac{\delta z}{2})\| < 1$. Следовательно, $\|T(s)z\| < \frac{2}{\delta}$ для всех s и всех единичных z, то есть $\sup_{s\geq 0}\|T(s)\| \leq \frac{2}{\delta}$. Это и есть необходимая ограниченность.

Асимптотическая устойчивость дополнительно требует $T(s)z \to 0$ для каждого достаточно малого z. По линейности это эквивалентно сходимости для *всех* z. В конечной размерности достаточно проверить базисные векторы, и тогда все столбцы $T(s)$ стремятся к нулю, а значит $\|T(s)\| \to 0$. В обратную сторону сходимость $T(s) \to 0$ и непрерывность на конечных промежутках дают ограниченность, а потому и устойчивость вместе с притяжением.

Доказательство спектрального критерия

Перейдём к комплексной жордановой форме $A = SJS^{-1}$. Обратимая постоянная замена меняет нормы лишь на постоянные множители, поэтому ограниченность и стремление к нулю не изменяются. Работа над $\mathbb{C}$ не создаёт ложного вывода для вещественной системы: если все вещественные решения ограниченны или стремятся к нулю, то это верно и для комплексных, поскольку каждое из них есть сумма вещественного и i-кратного вещественного решения.

Для клетки $J_k = \lambda E + N$, $N^k = 0$, имеем

$$e^{J_k s} = e^{\lambda s}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{s^j}{j!}N^j.$$

Рассмотрим все возможности.

Отрицательная вещественная часть. Если $\operatorname{Re}\lambda = -a < 0$, каждый элемент блока — сумма членов $s^j e^{-as}$ с постоянными комплексными множителями. Они стремятся к нулю и ограниченны при $s \geq 0$. Даже нетривиальная жорданова клетка здесь не мешает устойчивости. Если все корни таковы, вся матрица e^{As} стремится к нулю; по лемме ноль асимптотически устойчив. Более того, выбрав $0 < \gamma < \min(-\operatorname{Re}\lambda)$, можно оценить все конечные полиномиальные множители и получить

$$\|e^{As}\| \leq Me^{-\gamma s}.$$

Это объясняет экспоненциальное затухание ошибок, хотя в начале возможен временный рост.

Нулевая вещественная часть, клетки размера один. Блок равен $e^{i\beta s}$ и имеет модуль один. Если все остальные блоки затухают, вся фундаментальная матрица остаётся ограниченной:

ноль устойчив. Но ненулевой собственный вектор соответствующего корня даёт незатухающую моду. Поэтому асимптотической устойчивости нет. Нулевой корень $\lambda = 0$ входит сюда наравне с ненулевыми чисто мнимыми корнями.

Положительная вещественная часть. Для собственного вектора $h \neq 0$ решение $e^{\lambda s}h$ имеет норму $e^{\operatorname{Re}\lambda s}\|h\|$, неограниченную при $s \to \infty$. Следовательно, оператор перехода неограничен и по лемме ноль неустойчив. Масштабирование начального вектора делает его сколь угодно малым, но не устраняет последующий рост.

Нулевая вещественная часть, нетривиальная клетка. Возьмём последнее звено цепочки длины $k \geq 2$. Соответствующее решение имеет вид

$$e^{i\beta s}\left(h_k + sh_{k-1} + \cdots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}h_1\right).$$

Полиномиальный вектор неограничен: после деления на s^{k-1} он стремится к ненулевому $\frac{h_1}{(k-1)!}$. Множитель $e^{i\beta s}$ нормы не меняет. Поэтому снова нарушена ограниченность оператора перехода, и ноль неустойчив.

Перечень исчерпывает все жордановы клетки. Он доказывает достаточность устойчивого случая и необходимость его условий, а также оба направления критерия асимптотической устойчивости. Недостаточно было бы доказать только «отрицательные корни дают затухание».

Примеры, которые различают похожие случаи

Для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ оба корня нулевые, но $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решение с начальным значением $(0, \eta)$ равно $(\eta t, \eta)$ и выходит из любой фиксированной окрестности. Ноль неустойчив.

Для $A = \operatorname{diag}(0, -1)$ решения имеют вид (C_1, C_2e^{-t}) и ограниченны. Ноль устойчив, но обычно предел равен $(C_1, 0)$, поэтому притяжения к нулю нет. Повторный нулевой корень у $A = 0$ также не мешает устойчивости: важна полупростота, а не простота корня.

Наконец, у $A = \begin{pmatrix} -1 & K \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$e^{At} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & Kt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При большом K отклонение может сначала существенно вырасти, но матрица всё же ограниченна и стремится к нулю. Устойчивость не требует монотонного убывания евклидовой нормы. Для ЛНС с любой непрерывной правой частью и этой матрицей все решения асимптотически устойчивы относительно начальных ошибок, даже если само решение растёт из-за воздействия.

Ответ у доски

Начать с $v = u - \varphi$ и точно перенести оба определения. Затем сформулировать спектральный критерий, включая клетки на мнимой оси. Обосновать связь устойчивости с ограниченностью e^{At}. Разобрать четыре типа блоков и объяснить, почему список даёт не только достаточность, но и необходимость. Отдельно назвать условие «устойчиво, но не асимптотически».

Проверка себя

1. У A один блок размера три с корнем -2. Что с устойчивостью? *Ответ:* асимптотическая устойчивость; $t^2 e^{-2t} \to 0$.
2. Спектр состоит из -1, 0, 0, нулевые блоки одномерны. *Ответ:* устойчивость без асимптотической устойчивости.
3. Возможны ли одновременно устойчивое и неустойчивое решения у $\dot{u} = Au + e^{t^2} b$? *Ответ:* нет; устойчивость всех решений одинакова и определяется ЛОС, хотя воздействие быстро растёт.
4. Для каких a ноль системы с $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ устойчив? *Ответ:* только при $a < 0$, и тогда асимптотически. При $a = 0$ мешает клетка размера два.

Частые ошибки

Корни на мнимой оси должны быть полупростыми, но могут быть кратными. Для отрицательных вещественных частей размеры клеток не ограничиваются. Положительность хотя бы одной вещественной части достаточна для неустойчивости. Воздействие ЛНС не влияет на устойчивость по начальным данным, но влияет на само движение. Утверждение о постоянном спектре не переносится без отдельного обоснования на произвольную переменную матрицу $A(t)$.