БИЛЕТ 27

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость

Источники: сборник, с. 123-125; фотографии тетради, вопрос 25

Объём ответа: Точные определения и исследования непосредственно по ним

Доработка по фотографиям: вопрос 25

IMG_2020–IMG_2023; главы 27.

Что требуется. Кванторы, асимптотическая устойчивость, неустойчивость и примеры; дописать сведение к нулю.

Для фиксированного t_0 устойчивость φ означает: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что все решения с $\|u(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ существуют при всех $t \geq t_0$ и остаются на расстоянии меньше ε. При неавтономном уравнении δ может зависеть от t_0; равномерная устойчивость требует отдельного условия. В формуле неустойчивости на IMG_2021 сравнивать надо $u(t_1)$ с $\varphi(t_1)$, а не с $\varphi(t_0)$.

Дописанное сведение IMG_2023: положим $z = u - \varphi(t)$. Тогда

$$z' = F(t, z + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)) =: G(t, z), \quad G(t, 0) = 0.$$

Начальные отклонения и отклонения в каждый момент в точности равны z, поэтому устойчивость исходного решения эквивалентна устойчивости нуля новой системы.

Для $z' = az$ имеем $|z(t)| = |z_0|e^{a(t-t_0)}$. При $a \leq 0$ берём $\delta = \varepsilon$; при $a < 0$ есть также притяжение к нулю. При $a > 0$ фиксируем $\varepsilon_0 = 1$ и для любого δ выбираем $0 < z_0 < \min(\delta, 1)$: в момент $t = t_0 + a^{-1}\ln(1/z_0)$ отклонение равно 1, значит ноль неустойчив.

Понять смысл

Устойчивость — свойство реакции на малую ошибку в начальном состоянии. Сравнивают два решения *в один и тот же момент времени*. Вопрос состоит не в том, остаётся ли само выбранное решение маленьким или ограниченным, а в том, остаётся ли малым расстояние до него при достаточно малом начальном отклонении.

Устойчивость и притяжение различны. Устойчивость запрещает большое удаление в будущем; притяжение требует, чтобы расстояние в итоге стремилось к нулю. Асимптотическая устойчивость объединяет оба требования. На рисунке это две разные проверки: не выйти из заранее заданной трубки вокруг решения и со временем приблизиться к её центральной линии.

Точные определения и порядок кванторов

Пусть рассматривается $\dot{u} = f(t, u)$ и решение $\varphi(t)$, определённое для всех $t \geq t_0$. Предполагаем локальное существование и единственность в окрестности его графика; например, f непрерывна и локально липшицева по u. Фиксируем норму в $\mathbb{R}^n$.

Решение φ *устойчиво по Ляпунову при начальном моменте* t_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что для любого начального вектора u_0 с

$$\|u_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$$

соответствующее решение существует при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет

$$\|u(t; t_0, u_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon \qquad \text{для всех } t \geq t_0.$$

Если область задачи ограничена, начальные данные выбираются в ней. Достаточно проверять все достаточно малые ε: для больших работает тот же меньший радиус. Выбранное δ должно подходить *сразу всем* допустимым начальным отклонениям и *всем* будущим моментам. Зависимость от будущего t недопустима.

Решение *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и существует $\rho > 0$, такое, что при $\|u_0 - \varphi(t_0)\| < \rho$ выполняется

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t; t_0, u_0) - \varphi(t)\| = 0.$$

Радиус притяжения ρ не обязан совпадать с $\delta(\varepsilon, t_0)$. В общем определении не требуется, чтобы скорость сходимости была одинаковой для всех начальных данных.

Если δ можно выбирать независимо от t_0 для всех допустимых начальных моментов, устойчивость называется *равномерной*. Для базового билета достаточно обычной устойчивости; нельзя незаметно подменять её более сильным равномерным свойством. Выбор другой нормы в конечномерном пространстве не меняет устойчивость: любые две нормы ограничивают друг друга постоянными множителями, которые поглощаются выбором δ.

Как доказывать неустойчивость

Нужно обратить кванторы: найти *один* радиус $\varepsilon_0 > 0$, для которого сколь угодно малое начальное отклонение способно выйти из ε_0-трубки. То есть для каждого $\delta > 0$ выбирают начальные данные с отклонением меньше δ и момент $t \geq t_0$, в котором расстояние не меньше ε_0. Достаточно одного такого семейства возмущений; не требуется, чтобы удалялись все соседние решения.

При включённом в определение требовании существования на всей полуоси конечный обрыв близких решений тоже нарушает устойчивость. Но надёжнее предъявить выход на фиксированное расстояние до этого обрыва. Фраза «экспонента растёт» должна завершаться выбором возмущения и момента выхода, иначе связь с определением остаётся нераскрытой.

Пример 1: устойчивое неограниченное решение

Рассмотрим одномерную систему

$$\dot{u} = 1 + t - u, \qquad \varphi(t) = t, \qquad t \geq 0.$$

Общее решение $u = t + Ce^{-t}$; действительно, $\dot{u} = 1 - Ce^{-t} = 1 + t - u$. Начальное отклонение равно $|C|$, а в момент t

$$|u(t) - \varphi(t)| = |C|e^{-t} \le |C|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta = \varepsilon$. Если $|u(0) - \varphi(0)| < \delta$, то отклонение меньше ε при всех $t \ge 0$. Все решения существуют на всей полуоси. Кроме того, $|C|e^{-t} \to 0$ для любого C, поэтому решение асимптотически устойчиво. При этом сама $\varphi(t) = t$ неограниченна. Так видно, почему устойчивость нельзя определять как ограниченность решения.

Пример 2: устойчивость без притяжения

Для $\dot{u} = 0$ решения постоянны: $u(t) = u_0$. Относительно любого $\varphi(t) = c$ расстояние равно $|u_0 - c|$. Выбор $\delta = \varepsilon$ доказывает устойчивость. Если $u_0 \neq c$, расстояние положительно и не стремится к нулю, поэтому асимптотической устойчивости нет. Для линейного центра на плоскости действует та же идея: расстояние до нуля постоянно в подходящей норме.

Пример 3: неустойчивость с явными кванторами

Для $\dot{u} = u$ нулевое решение неустойчиво. Возьмём $t_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 1$. Для произвольного $\delta > 0$ положим $u_0 = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) > 0$. Тогда $u_0 < \delta$, но при

$$t_* = \ln \frac{1}{u_0} \ge 0$$

получаем $u(t_*) = u_0 e^{t_*} = 1$. Следовательно, никакой начальный радиус не удерживает все возмущения внутри единичной трубки. Этот расчёт — полноценное доказательство от определения.

Пример 4: устойчивое и неустойчивое решения одного уравнения

Рассмотрим

$$\dot{u} = 1 - u^2.$$

Равновесия $u = 1$ и $u = -1$ существуют на всей прямой. Между ними правая часть положительна, вне отрезка $[-1, 1]$ — отрицательна.

Устойчивость $u = 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ берём $\delta = \min(\varepsilon, \frac{1}{2})$. Если $u_0 \in (1 - \delta, 1)$, решение возрастает и не может пересечь равновесие 1 по единственности. Если $u_0 \in (1, 1 + \delta)$, оно убывает и также не пересекает 1. Значит, оно всё время остаётся между u_0 и 1, так что $|u(t) - 1| \le |u_0 - 1| < \varepsilon$. Траектория находится в компактном отрезке, где поле гладко; теорема продолжения обеспечивает существование на всей правой полуоси.

Решение монотонно и ограниченно, поэтому имеет предел ℓ. Этот предел обязан быть равновесием: иначе производная вблизи него сохраняла бы ненулевой знак и модуль, несовместимые со сходимостью. В рассматриваемой окрестности единственное равновесие — 1, значит $u(t) \to 1$. Таким образом, $u = 1$ асимптотически устойчиво. Его действительная область притяжения шире выбранной окрестности, но для определения это не нужно.

Неустойчивость $u = -1$. Зафиксируем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Для любого $\delta > 0$ выберем $\eta = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4})$ и $u_0 = -1 + \eta$. Решение лежит в $(-1, 1)$ и имеет вид

$$u(t) = \tanh(t + \operatorname{artanh} u_0).$$

В момент $t_* = -\operatorname{artanh} u_0 > 0$ оно достигает нуля. Начальное расстояние до -1 равно $\eta < \delta$, а конечное равно единице. Следовательно, равновесие -1 неустойчиво. Для этого вывода не нужны ни вторая производная, ни подробное исследование выпуклости графиков.

Ответ у доски

Сначала произнести порядок «для любого ε найдётся δ, для всех близких начальных данных, для всех будущих времён». Добавить существование решений на полуоси. Для асимптотической устойчивости отдельно назвать устойчивость и притяжение. Показать оценку отклонения на линейном примере, затем уравнение $\dot{u} = 1 - u^2$ и оба равновесия. Неустойчивость подтвердить фиксированным ε_0.

Проверка себя

1. Устойчиво ли решение $u = 0$ уравнения $\dot{u} = -2u$? *Ответ:* асимптотически устойчиво; $|u(t)| = |u_0|e^{-2t}$, $\delta = \varepsilon$ при $t_0 = 0$.
2. Доказывает ли $u(t) \to 0$ для одного начального состояния устойчивость нуля? *Ответ:* нет; определение относится ко всем достаточно близким начальным данным.
3. Исследуйте $\dot{u} = (4 - t^2)u$ при $t_0 = 0$. *Ответ:* $u = u_0 e^{4t - \frac{t^3}{3}}$; максимум показателя на $[0, \infty)$ равен $\frac{16}{3}$ при $t = 2$. Берём $\delta = \varepsilon e^{-\frac{16}{3}}$; затем $u(t) \to 0$. Ноль асимптотически устойчив, несмотря на начальный рост.
4. Для $\dot{u} = 1 - u^2$ решение начинается ниже -1. Что происходит? *Ответ:* оно убывает и за конечное время уходит к $-\infty$; это не влияет на локальную устойчивость $+1$, но даёт ещё один способ увидеть неустойчивость -1.

Частые ошибки

Не менять местами ε и δ. Не выбирать δ в зависимости от будущего времени. Не объявлять решение устойчивым только потому, что оно само существует долго или ограниченно. Не заменять доказательство рисунком. В нелинейном уравнении разные решения могут иметь разную устойчивость; для линейной системы действует специальное утверждение следующего билета.