БИЛЕТ 26

Классификация линейных особых точек на плоскости

Источники: сборник, с. 113-122; фотографии тетради, вопрос 24

Объём ответа: Теорема Пуанкаре: формулировка; все линейные случаи с построением траекторий

Доработка по фотографиям: вопрос 24

IMG_2014–IMG_2019; главы 26.

Что требуется. Классификация при det A ≠ 0; все случаи, примеры, исключительные направления и кривые.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ даёт $dy/dx = (cx + dy)/(ax + by)$ там, где знаменатель не нуль. При $\det A \neq 0$ начало — единственная особая точка. Вещественные корни разных знаков: седло; разные одного знака: узел; повторный ненулевой: звёздный узел при $A = \lambda E$ либо неправильный узел с клеткой размера два. Чисто мнимые корни дают центр, остальные невещественные — фокус.

Уточнение рисунков: для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$ ответ $y = Cx^2$ не включает ось $x = 0$, её добавляем отдельно. Каждая парабола распадается на две орбиты; равновесие между ними не проходится за конечное время. Для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = x + y$ получаем $y = x(\ln|x| + C)$ и отдельно вертикальные лучи.

Пример фокуса на снимке: $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -x + y$. В полярных координатах $\dot{r} = r$, $\dot{\theta} = -1$; значит $r = Ce^{-\theta}$ на развёрнутом угле. Это спирали по часовой стрелке, наружу при росте времени. Циклов нет. Для $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ имеем $r' = 0$: окружности и центр. Не переносим классификацию линейного центра на нелинейную систему без отдельного обоснования.

Понять смысл и точная постановка

Рассматриваем вещественную систему

$$\dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = cx + dy, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Её единственное равновесие — начало координат. На участках с $ax + by \neq 0$ можно исключить время:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}.$$

Это уравнение описывает графиковые участки фазовых кривых. Вертикальные касательные, отдельные вертикальные траектории и полный цикл удобнее исследовать через систему; деление на $\dot{x}$ не должно приводить к их потере.

Обратимая вещественная линейная замена координат переводит матрицу в канонический вид. Она сохраняет пересечения, замкнутость, приближение к нулю и качественный тип, но не обязана сохранять углы, длины и форму окружности. Стрелки определяются увеличением времени. Замена A на $-A$ сохраняет геометрические кривые и обращает все стрелки.

Теорема Пуанкаре о линейной классификации

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения A, $\det A \neq 0$.

1. Два вещественных корня разных знаков дают седло.
2. Два различных вещественных корня одного знака дают узел.
3. При совпадающих вещественных корнях $\lambda \neq 0$ получаем дикритический, или звёздный, узел, если $A = \lambda E$, и вырожденный, или неправильный, узел при одной клетке размера два.
4. Корни $\pm i\beta$, $\beta \neq 0$, дают центр.
5. Корни $\alpha \pm i\beta$, $\alpha\beta \neq 0$, дают фокус.

Узел и фокус асимптотически устойчивы при отрицательных вещественных частях корней и неустойчивы при положительных. Седло неустойчиво. Линейный центр устойчив, но не асимптотически устойчив. Теорема в этом билете классифицирует *линейную* систему; перенос на нелинейную требует отдельной теоремы и её условий.

Седло: противоположные знаки

В собственных координатах система имеет вид

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \qquad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta, \qquad \lambda_1 > 0 > \lambda_2.$$

Решения $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Если обе координаты ненулевые,

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

причём каждая ветвь рассматривается при фиксированном знаке ξ. На оси ξ движение идёт от нуля, на оси η — к нулю. Эти четыре полуоси — сепаратрисы; остальные траектории не подходят к нулю ни в одном направлении времени.

Пример: $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, то есть $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Вне осей $xy = C$. Для рисунка сначала проводят оси со стрелками, затем по гиперболе в каждом секторе. При $t \to +\infty$ ненулевая x-компонента растёт, а y-компонента убывает; это задаёт стрелки без догадок. Циклов нет.

Обычный узел: разные корни одного знака

Возьмём устойчивый пример

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = -2y, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Получаем $y = Cx^2$ и отдельно $x = 0$. Каждую параболу нужно разделить на две ветви знаком x, потому что переход через равновесие за конечное время невозможен. Обе собственные

оси инвариантны. Все неосевые траектории при подходе к нулю касаются оси медленно затухающей моды e^{-t}: $\frac{y}{x} = (\frac{C_2}{C_1})e^{-t} \to 0$.

Вообще при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, почти все подходящие к нулю траектории касаются собственного направления λ_1; исключение — прямая второго собственного вектора. Если оба корня положительны, подход к нулю рассматривается при $t \to -\infty$, а стрелки направлены наружу. В исходных координатах оси заменяются прямыми собственных векторов.

Дикритический узел: два собственных вектора

Если у повторного корня λ есть два независимых собственных вектора, матрица порядка два равна λE. Следовательно,

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \qquad y = C_2 e^{\lambda t}.$$

Фазовые траектории — отдельные лучи из нуля; само начало — ещё одна орбита. Все направления являются направлениями подхода к равновесию в соответствующем конце времени. Пример $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = 2y$ даёт $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; стрелки наружу. При коэффициенте -2 стрелки идут к нулю.

Важно, что луч и целая прямая — не одно и то же: положительный множитель $e^{\lambda t}$ не меняет знак вектора. Два противоположных луча одной прямой являются разными орбитами.

Вырожденный узел: один собственный вектор

Удобный пример, согласованный с формой из сборника:

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = x + y, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Матрица имеет повторный корень 1 и единственное собственное направление $x = 0$. Решение

$$x = C_1 e^t, \qquad y = e^t(C_2 + C_1 t).$$

При $C_1 \neq 0$ исключение времени даёт

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Дополнительно имеются два вертикальных луча $x = 0$. При $t \to -\infty$ все эти траектории подходят к нулю и касаются вертикального собственного направления: для неосевых траекторий $\frac{y}{x} = t + \frac{C_2}{C_1}$ неограниченно, а нормированный вектор стремится к одному из вертикальных единичных векторов. Равновесие неустойчиво, поскольку при увеличении времени движения уходят от него.

Для эскиза отмечают вертикальную собственную прямую, горизонтальные касательные на $y = -x$, наклон 1 на $y = 0$ и семейство логарифмических кривых. При смене знака всей матрицы получаются те же кривые устойчивого узла с обратными стрелками. Слово «вырожденный» здесь относится к геометрии повторного корня, хотя $\det A = 1 \neq 0$.

Фокус: комплексные корни с ненулевой вещественной частью

В подходящих вещественных координатах

$$\dot{\xi} = \alpha\xi - \beta\eta, \qquad \dot{\eta} = \beta\xi + \alpha\eta, \qquad \beta \neq 0.$$

В полярных координатах $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$:

$$\dot r = \alpha r, \qquad \dot\theta = \beta, \qquad r = r_0 e^{\alpha(t-t_0)}, \quad r = C\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\theta\right).$$

При $\alpha < 0$ траектории спирально приближаются к нулю, при $\alpha > 0$ удаляются. Знак β в этих координатах определяет вращение. После преобразования с отрицательным определителем ориентация плоскости меняется, поэтому в исходных координатах направление вращения лучше проверить по полю в одной точке.

Пример из сборника: $\dot x = x - y$, $\dot y = x + y$. Здесь $\alpha = \beta = 1$, $r = Ce^{\theta}$, движение наружу против часовой стрелки. Уравнение траекторий $y' = \frac{x+y}{x-y}$ даёт горизонтальные касательные на $y = -x$ и вертикальные на $y = x$. На $x = 0$ наклон равен -1, угол равен $-\frac{\pi}{4}$ по модулю π. Эти значения исправляют описки в исходном разборе. Ни одна неравновесная траектория фокуса не замкнута.

Центр: чисто мнимые корни

При $\alpha = 0$ предыдущая система даёт $r' = 0$, $\theta' = \beta$. В канонических координатах траектории — окружности; в исходных — эллипсы. Период каждого непостоянного решения линейной системы равен $\frac{2\pi}{|\beta|}$.

Пример: $\dot x = -y$, $\dot y = x$, откуда $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ и $x^2 + y^2 = C > 0$. Стрелки против часовой стрелки. Норма решения постоянна, поэтому ноль устойчив; ненулевое решение к нему не приближается, поэтому асимптотической устойчивости нет. Полная окружность — фазовая траектория системы, а не один глобальный график $y(x)$ исходного дробного уравнения.

Быстрая классификация через след и определитель

Положим $\tau = \operatorname{tr} A = a + d$, $\Delta = \det A$, $\mathcal{D} = \tau^2 - 4\Delta$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

- $\Delta < 0$: седло.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} > 0$: узел; знак τ задаёт устойчивость.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} = 0$: повторный узел; проверить, равна ли A скалярной матрице.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} < 0$, $\tau \neq 0$: фокус; знак τ задаёт устойчивость.
- $\Delta > 0$, $\tau = 0$: центр, поскольку $\mathcal{D} < 0$.

Если $\Delta = 0$, начало не является изолированным равновесием линейной системы: $\ker A$ содержит прямую. Такой случай находится вне сформулированной классификации. Нельзя механически назвать его узлом по одному ненулевому корню.

Ответ у доски и проверка себя

План ответа: перейти от дробного уравнения к системе, назвать условие $\det A \neq 0$, сформулировать пять пунктов классификации с разбиением повторного узла на два типа, для каждого дать каноническую систему, уравнение или параметризацию кривых и стрелки.

Устойчивость выбирать по знаку вещественных частей, а не по слову «узел».

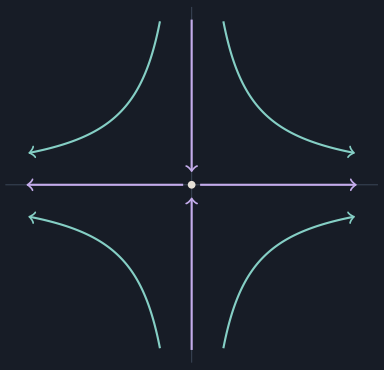
1. Классифицируйте $\dot{x} = 3x$, $\dot{y} = 2x + y$. *Ответ:* неустойчивый узел, корни 3 и 1; собственные направления $y = x$ и $x = 0$.
2. Для $\dot{x} = a(x + y)$, $\dot{y} = ay$ возможно ли седло? *Ответ:* нет. При $a \neq 0$ повторный корень a и вырожденный узел; при $a = 0$ каждая точка равновесна.
3. Классифицируйте $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Ответ:* устойчивый фокус, вращение против часовой стрелки.
4. У A корни 0 и -4. Применима ли теорема об изолированной особой точке? *Ответ:* нет; имеется прямая равновесий. Нулевое решение может быть устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

Частые ошибки

У фокуса нет циклов; у линейного центра нет притяжения. При повторном корне нужно проверить собственные векторы. Формулу логарифмической спирали следует писать в канонических координатах, а не для произвольной исходной матрицы. Собственные прямые и вертикальные траектории нельзя терять при делении. Наконец, линейная классификация сама по себе не доказывает наличие центра у нелинейной системы.

Фазовые портреты в одном развороте

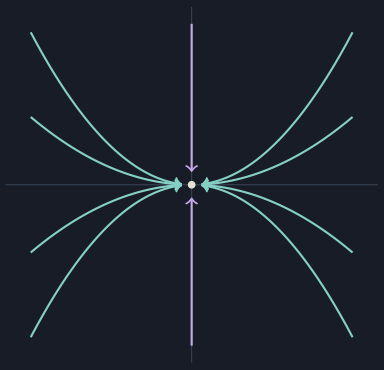
Это точные траектории выбранных модельных систем. Стрелки показывают рост времени. Линейная невырожденная замена координат может изменить углы и форму рисунка, сохранив тип движения.



Седло

$x' = x,\ y' = -y.$

Собственные числа 1 и -1. Вне осей $xy = C$. По вертикальной оси решения входят в нуль, по горизонтальной выходят. Оси являются сепаратрисами. Нуль неустойчив.



Устойчивый узел с разными корнями

$x' = -x,\ y' = -2y.$

На каждой полуплоскости $y = Cx^2$. Типичные траектории подходят к нулю касательно медленному направлению x. Вертикальная ось — отдельная прямая траектория. Все решения затухают.

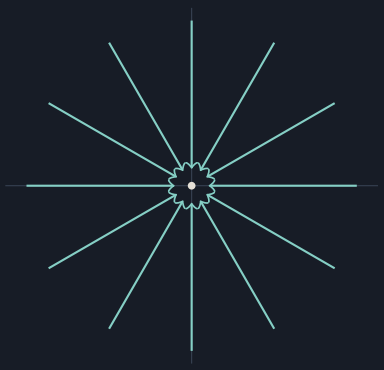


Центр

$x' = -y,\ y' = x.$

$x^2 + y^2 = C$, движение против часовой стрелки. Нуль устойчив, но не притягивает соседние ненулевые решения. Здесь замкнутые траектории не изолированы среди замкнутых траекторий, поэтому это не предельные циклы.

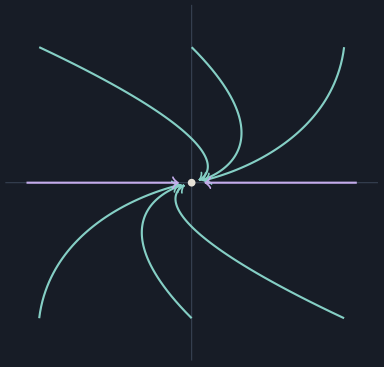
Повторный узел и фокус



Звёздный устойчивый узел

$x' = -x,\ y' = -y.$

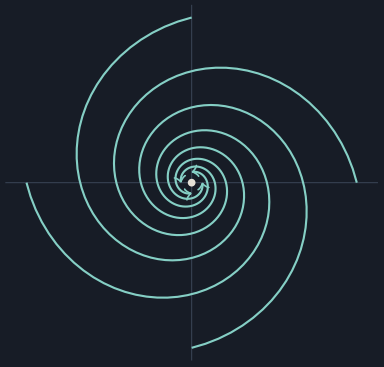
Матрица $-E$, два независимых собственных вектора. Каждое направление инвариантно: ненулевые траектории — лучи, направленные к нулю. Повторный корень сам по себе не означает жорданову клетку.



Неправильный устойчивый узел

$x' = -x + y,\ y' = -y.$

$x = e^{-t}(C_1 + C_2 t),\ y = C_2 e^{-t}$. Одна жорданова клетка размера 2. Кривые подходят к оси собственного вектора $(1, 0)^T$; они не являются набором прямых лучей.



Устойчивый фокус

$x' = -\frac{1}{4}x - y,\ y' = x - \frac{1}{4}y.$

$r' = -\frac{1}{4}r,\ \theta' = 1$. Радиус убывает, угол неограниченно растёт. Траектория спиральная и не замкнута; фиксированного предельного направления к нулю нет.

Для получения неустойчивого узла или фокуса можно изменить знак всего векторного поля: геометрические кривые сохранятся, а все стрелки времени обратятся. Для седла обращение времени меняет входящие и выходящие сепаратрисы местами.