БИЛЕТ 25

Автономные системы и фазовые траектории

Источники: конспект лекций, с. 110-112; сборник, с. 110-112

Объём ответа: Определения и полные доказательства свойств траекторий

Доработка по фотографиям: вопрос 23

IMG_2009–IMG_2013; главы 25.

Что требуется. Определения; сдвиг времени, непересечение, повторное прохождение точки, период и цикл.

В автономной системе $u' = F(u)$ уравнение не содержит время явно. Поэтому $v(t) = u(t + c)$ — решение на сдвинутом интервале: $v' = F(u(t + c)) = F(v)$. Если $u(t_1) = v(t_2)$, выравниваем время сдвигом и используем единственность. Для максимальных орбит получаем совпадение целых образов; для произвольных участков — совпадение согласованных частей.

Если непостоянное решение повторно проходит одну точку, участок между двумя прохождениями можно периодически повторить. Значения и производные на стыках совпадают, поскольку производная равна одному и тому же F в повторённой точке. Так получаем глобальное периодическое решение.

Дополним обоснование минимального периода. В непостоянной орбите $F \neq 0$: иначе единственность заставила бы решение быть равновесием. Поэтому одна координата локально строго монотонна, и достаточно малых положительных периодов нет. Предел последовательности периодов снова является периодом по непрерывности. Следовательно, положительная нижняя грань периодов достигается; на одном минимальном периоде повторных точек нет. Неподвижная точка — равновесие, а не непостоянный цикл.

Понять смысл

В автономной системе закон движения зависит от состояния, но не от показания часов. Поэтому одна и та же точка фазового пространства не может иметь две разные скорости. Однако для непересечения траекторий мало одной однозначности правой части: нужна ещё единственность задачи Коши. Именно она не позволяет двум движениям после встречи «разойтись».

График решения и фазовая траектория — разные объекты. График $\{(t, u(t))\}$ живёт в пространстве времени и состояний, а фазовая траектория $\{u(t)\}$ — только в пространстве состояний. Периодическое движение имеет незамкнутый график, но замкнутую фазовую траекторию. Сдвиг времени меняет график и не меняет полную фазовую траекторию.

Точная постановка и определения

Рассматриваем

$$\dot{u} = F(u), \qquad u \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

где G открыто, F непрерывна и локально липшицева по u. Достаточное удобное условие — $F \in C^1(G)$. Все утверждения ниже о единственности относятся именно к таким системам. Максимальным решением называется решение, которое нельзя продолжить на больший интервал, оставаясь решением в G.

- *Фазовое пространство* G — множество допустимых состояний.
- *Фазовая траектория*, или орбита, — образ максимального решения в G с указанием направления времени. Когда рассматривается лишь часть интервала, получается участок орбиты.
- *Равновесие* a определяется равенством $F(a) = 0$ и соответствует постоянному решению $u(t) \equiv a$.
- *Цикл* — орбита непостоянного периодического решения. Неподвижная точка циклом не называется, хотя постоянная функция формально имеет любой положительный период.
- *Фазовый портрет* — совокупность всех орбит, включая равновесия, с направлениями движения.

Вектор $F(u)$ касателен к орбите и задаёт скорость. В точке равновесия скорость равна нулю; нормированное направление вектора там не определено. При $F(a) \neq 0$ хотя бы одна координата решения имеет ненулевую производную и локально монотонна, поэтому орбита локально является регулярной кривой без самопересечения.

Сдвиг времени: формулировка и доказательство

Если $u(t)$ решает систему на интервале I, то $v(t) = u(t + c)$ решает её на $I - c$. По цепному правилу

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t + c) = F(u(t + c)) = F(v(t)).$$

Поскольку $t + c$ пробегает весь I, образы u и v совпадают. Существенно, что справа нет явного времени: для $\dot{u} = f(t, u)$ после сдвига получается $f(t + c, v)$, обычно другое уравнение.

Непересечение полных траекторий

Утверждение. Две полные орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Если $u(t_1) = v(t_2)$, то решения совпадают после сдвига времени.

Доказательство. Введём $w(t) = v(t + t_2 - t_1)$. По предыдущему свойству это решение той же системы, причём $w(t_1) = u(t_1)$. Единственность задачи Коши даёт совпадение в некоторой окрестности t_1. Оно продолжается на весь общий интервал: множество моментов совпадения замкнуто по непрерывности и открыто по локальной единственности; общий интервал связен. Совпадающие на пересечении решения склеиваются на объединении двух интервалов. Если интервалы различались, объединение строго расширяло бы хотя бы один из них, вопреки максимальности. Поэтому интервалы совпадают; совпадают функции и их образы.

Условие полноты нельзя незаметно опускать: два разных участка одной орбиты могут пересекаться, не совпадая как множества. Теорема говорит о максимальных орбитах, а для участков — лишь о согласованности после сдвига на общем промежутке.

Повторное прохождение точки и периодичность

Пусть u непостоянно и $u(t_1) = u(t_2)$, $t_2 > t_1$. Тогда $T = t_2 - t_1$ — период после глобального продолжения решения, а его образ — цикл.

Для аккуратного доказательства возьмём участок $[t_1, t_2]$ и повторим его с периодом T на всей прямой. Значения на стыках совпадают. Производные также совпадают, поскольку на обоих концах они равны одному вектору $F(u(t_1))$. Полученная функция класса C^1 решает систему и продолжает исходный участок. По единственности она совпадает с исходным максимальным решением; значит, оно определено на всей $\mathbb{R}$ и периодично.

Почему у непостоянного решения можно говорить о простом замкнутом цикле? В его точках $F \neq 0$, поэтому локальная монотонность одной координаты исключает сколь угодно малые положительные периоды. Множество периодов замкнуто и замкнуто относительно разности; оно имеет наименьший положительный элемент T_*. На $[0, T_*)$ разные моменты не дают одинаковой точки, иначе появился бы меньший период. Поэтому цикл не имеет настоящего пересечения типа «восьмёрки».

Итак, максимальная орбита — либо точка, либо цикл, либо образ инъективного непериодического движения. Последняя орбита может иметь сложное предельное множество; классификация не утверждает, что она обязана быть прямой или уходить в бесконечность.

Можно ли достичь равновесия?

Непостоянное решение не может попасть в равновесие за конечное время. Если $u(t_*) = a$, $F(a) = 0$, то через данные (t_*, a) проходят u и постоянное решение a. Единственность в обе стороны по времени заставляет их совпасть, противоречие.

Немного сильнее: непостоянное решение не может даже иметь предел $a \in G$ при конечном конце максимального интервала, если $F(a) = 0$. При существовании такого конечного предела решение продолжается через конец интервала задачей Коши из a; непрерывность F обеспечивает согласование производных. Продолженное решение достигает равновесия, и предыдущий аргумент снова даёт противоречие. Приближение к равновесию возможно лишь при бесконечном времени, если не нарушены условия теоремы.

Полезно и обратное наблюдение: если $u(t) \to a \in G$ при $t \to +\infty$, то $F(a) = 0$. Иначе найдётся координата с $F_j(a) \neq 0$. По непрерывности в достаточно малой окрестности a производная $\dot{u}_j$ имеет постоянный знак и модуль не меньше некоторого $c > 0$. Решение в итоге остаётся в этой окрестности, и интегрирование даёт неограниченное изменение u_j, несовместимое с конечным пределом. Аналогично для $t \to -\infty$.

Примеры и построение портрета

Для $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$:

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-2t}.$$

Если $C_1 \neq 0$, исключение времени даёт $y = Cx^2$, причём знак x постоянен. Каждая полупарабола — отдельная орбита; ось $x = 0$ рассматривается отдельно. Стрелки направлены к началу координат. Никакая непостоянная траектория не достигает его за конечное время, хотя все стремятся к нему при $t \to +\infty$.

Для $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ решения описывают окружности $x^2 + y^2 = r^2$. При $r > 0$ они имеют период 2π; при $r = 0$ получается равновесие, которое нужно исключить из определения цикла.

В отсутствие единственности выводы меняются. У скалярного уравнения $\dot{u} = 3|u|^{\frac{2}{3}}$ есть решение

$$u(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a, \\ 0, & t \geq a. \end{cases}$$

Оно достигает равновесия за конечное время. Правая часть непрерывна, но не локально липшицева в нуле. Поэтому этот пример не опровергает доказанные теоремы, а показывает необходимость их гипотез.

Ответ у доски

Дать определения и назвать условие единственности. Проверить сдвиг времени. Свести встречу двух орбит к одинаковым начальным данным. Повторное прохождение одной точки превратить в периодическое продолжение; отдельно исключить постоянное решение. Недостижимость равновесия вывести сравнением с постоянным решением. При вопросе о пределе объяснить, почему конечный предел внутри области обязан быть равновесием.

Проверка себя

1. Может ли решение $\dot{u} = u^2$ с $u(0) < 0$ достичь нуля? *Ответ:* нет; $u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t} \to 0$ лишь при $t \to +\infty$.
2. Два решения автономной системы имеют одинаковые значения в разные моменты. Обязаны ли они совпадать при одинаковом t? *Ответ:* нет; они совпадают после соответствующего сдвига времени.
3. Может ли непостоянная периодическая траектория содержать равновесие? *Ответ:* нет, по единственности.
4. Запрещены ли теоремой гомоклинические петли? *Ответ:* нет. Такая орбита подходит к одному равновесию при $t \to \pm\infty$, но не включает его при конечном времени и не является самопересекающимся периодическим решением.

Частые ошибки и границы источника

Не выводить непересечение из одной непрерывности. Не путать полную орбиту с участком. Не называть равновесие циклом. Замкнутая картинка, содержащая равновесие как

предельную точку, ещё не доказывает периодичность. В доступном конспекте лекций записаны начало темы и сдвиг времени; оставшаяся часть охвата восстановлена по сборнику и приведена здесь с полными условиями и доказательствами.