БИЛЕТ 24

ЛНС с векторным квазимногочленом

Источники: конспект лекций, с. 105-109; сборник, с. 105-109

Объём ответа: Полное доказательство нерезонансного случая и жордановых оценок степени

Доработка по фотографиям: вопрос 22

IMG_2008; главы 24.

Что требуется. Полное восстановление отсутствующего ответа: определения, степень, резонанс и доказательство.

На IMG_2008 после вопроса нет ответа. Векторный многочлен $P_N(t) = \sum p_j t^j$ имеет степень N, если $p_N \neq 0$; степень равна максимуму степеней координат. В системе $u' = Au + e^{\mu t} P_N$ положим $u = e^{\mu t} Q$, $B = \mu E - A$. Тогда $Q' + BQ = P_N$.

Если B обратима, ищем $Q = \sum_{j=0}^{N} q_j t^j$ и сравниваем коэффициенты:

$$Bq_j + (j+1)q_{j+1} = p_j, \quad q_{N+1} = 0.$$

Сначала $q_N = B^{-1} p_N$, затем $q_j = B^{-1}(p_j - (j+1)q_{j+1})$. Получаем единственный полином степени N.

При резонансе переходим к жордановым клеткам. В клетке размера k для $\lambda = \mu$ последовательно решаем $v_k' = r_k$, $v_{k-1}' = v_k + r_{k-1}$ и так далее. Каждый шаг интегрирования увеличивает верхнюю границу степени на единицу. Поэтому существует Q степени не выше $N + k_\mu$, где k_μ — размер самой длинной резонансной клетки. Равенство не обязательно.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = 0$. Для $P = (0,1)^T$ частное решение $(t^2/2, t)^T$, степень $2 = N + k_\mu$. Для $P = (1,0)^T$ подходит $(t, 0)^T$, степень только 1. Скалярный множитель t^s нельзя без доказательства одинаково навязывать всем координатам системы.

Понять смысл

Векторный вариант метода неопределённых коэффициентов устроен сложнее скалярного: компоненты связаны матрицей A. Воздействие на одну координату может через жорданову цепочку вызвать многократное интегрирование в другой. Поэтому величина резонанса определяется размером жордановой клетки, а не только кратностью корня характеристического многочлена.

Особенно важно различать существование решения с *оценкой* степени и неизбежность достижения этой оценки. Даже если матрица допускает сильный резонанс, конкретная правая часть может не возбуждать соответствующую цепочку. Теорема гарантирует достаточный класс пробных функций; она не утверждает, что все их старшие коэффициенты ненулевые.

Точная формулировка

Векторный многочлен степени N — функция

$$P(t) = p_N t^N + \cdots + p_0, \qquad p_j \in \mathbb{C}^n, \quad p_N \neq 0.$$

Его степень — максимальная степень среди компонент. Векторный квазимногочлен имеет вид $e^{\mu t}P(t)$; конечные суммы таких выражений обрабатываются по принципу суперпозиции.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ постоянна, $\mu \in \mathbb{C}$, P — ненулевой векторный многочлен степени N. Тогда система

$$\dot{u} = Au + e^{\mu t}P(t)$$

имеет частное решение $u_p = e^{\mu t}Q(t)$, где Q — векторный многочлен, причём:

- если $\mu \notin \operatorname{spec} A$, то $\deg Q = N$, и полиномиальное Q единственно;
- если $\mu \in \operatorname{spec} A$ и k_μ — максимальный размер клетки для μ, можно выбрать Q так, что $\deg Q \leq N + k_\mu$.

Во втором случае равенство степени не гарантируется, а полиномиальное Q обычно не единственно. Вещественные правые части с синусами и косинусами получаются взятием вещественных частей комплексных частных решений.

Доказательство: сначала убрать экспоненту

Подстановка $u = e^{\mu t}Q$ даёт

$$\mu e^{\mu t}Q + e^{\mu t}Q' = e^{\mu t}AQ + e^{\mu t}P, \qquad Q' + BQ = P, \quad B = \mu E - A.$$

В отличие от исходной системы, правая часть теперь полиномиальна. Нужно решить это уравнение в классе многочленов, а не найти произвольное решение с интегралами.

Нерезонанс: B обратима

Положим $Q = \sum_{j=0}^{N} q_j t^j$, $q_{N+1} = 0$. Приравнивая коэффициенты при t^j, получаем

$$Bq_j + (j+1)q_{j+1} = p_j, \qquad 0 \leq j \leq N.$$

Решаем сверху вниз:

$$q_N = B^{-1}p_N, \qquad q_j = B^{-1}(p_j - (j+1)q_{j+1}).$$

Все коэффициенты найдены однозначно. Так как $p_N \neq 0$ и B обратима, $q_N \neq 0$, поэтому степень равна N.

В классе всех векторных многочленов других решений нет. Если разность R двух решений была бы ненулевым многочленом степени m, то из $R' + BR = 0$ старший коэффициент удовлетворял бы $Br_m = 0$, невозможно. Заметим также явную конечную формулу

$$Q = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j B^{-j-1} P^{(j)}.$$

При подстановке слагаемые телескопически сокращаются, а $P^{(N+1)} = 0$. Эта формула полезна для быстрой проверки, но вычисление через рекурсию часто проще.

Резонанс: переход к клеткам

Пусть $A = SJS^{-1}$, S обратима. Положим $Q = SV$ и $R = S^{-1}P$. Невырожденное постоянное преобразование сохраняет степень векторного многочлена: старший коэффициент p_N превращается в $S^{-1}p_N \neq 0$. Уравнение принимает вид

$$V' = (J - \mu E)V + R.$$

Оно распадается на независимые подсистемы по жордановым клеткам. Если собственное значение клетки $\lambda \neq \mu$, матрица $\mu E - J_\lambda$ обратима; уже доказанный случай даёт степень соответствующей части V не выше N.

Для клетки размера k с $\lambda = \mu$ остаётся нильпотентная система

$$v_1' = v_2 + r_1(t), \quad v_2' = v_3 + r_2(t), \quad \dots, \quad v_{k-1}' = v_k + r_{k-1}(t), \quad v_k' = r_k(t),$$

где $\deg r_j \leq N$. Решаем снизу вверх, выбирая, например, нулевые постоянные интегрирования. Последняя координата имеет степень не выше $N + 1$. В предпоследнем уравнении правая часть имеет степень не выше $N + 1$, значит $\deg v_{k-1} \leq N + 2$. Индукцией

$$\deg v_j \leq N + k - j + 1, \qquad 1 \leq j \leq k.$$

Таким образом, степень всего блока не выше $N + k$. Здесь следует говорить «не выше»: некоторые правые части могут быть нулевыми, их старшие члены могут сокращаться.

Собираем решения блоков. Наибольшее возможное повышение задаётся самым длинным *резонансным* блоком, поэтому $\deg V \leq N + k_\mu$. Возвращение $Q = SV$ сохраняет фактическую степень и, в частности, найденную верхнюю границу. Умножение на $e^{\mu t}$ завершает доказательство.

Как выбирать пробную функцию

Если резонанса нет, берут $e^{\mu t}(q_N t^N + \dots + q_0)$ и решают матричную рекурсию. Если резонанс есть, можно взять полный векторный многочлен степени $N + k_\mu$ с неизвестными коэффициентами и приравнять коэффициенты. Некоторая свобода ответа соответствует однородным решениям; её допустимо устранить удобным выбором свободных параметров.

Более экономный путь — перейти к цепочным координатам и интегрировать снизу вверх. В исходных координатах нельзя автоматически домножать *весь* пробный вектор на t^{k_μ} по скалярному правилу. Для разных координат требуются разные степени, и такое искусственное ограничение иногда исключит все подходящие решения.

При нескольких показателях μ_j задача решается для каждого отдельно. Найденные частные решения складываются, а общее решение ЛНС получается добавлением ФСР из билета 23. Начальные условия лучше накладывать только после этого, иначе можно спутать произвольные постоянные однородной части с коэффициентами выбранного частного решения.

Пример: граница достигается и не достигается

Рассмотрим

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mu = 1$, $N = 1$, единственная клетка имеет размер два. После $u = e^t Q$:

$$q_2' = t, \qquad q_1' = q_2.$$

Берём $q_2 = \frac{t^2}{2}$, $q_1 = \frac{t^3}{6}$. Поэтому

$$u_p = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad u = e^t \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + \frac{t^3}{6} \\ C_2 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Здесь степень $N + k_\mu = 3$ действительно достигается. Проверка особенно проста после снятия экспоненты: производные компонент равны именно правым частям треугольной системы.

Теперь оставим ту же матрицу, но возьмём воздействие $e^t(1,0)^{\mathsf{T}}$. Теорема допускает степень до двух. Однако $Q = (t,0)^{\mathsf{T}}$ уже подходит и имеет степень один. Более того, $Q = (0,-1)^{\mathsf{T}}$ также подходит: $Q' = 0$, а $(A - E)Q + (1,0)^{\mathsf{T}} = 0$. Степень может быть даже нулевой. Разность этих двух частных решений является однородным решением $e^t(t,1)^{\mathsf{T}}$.

Ответ у доски

Определить степень векторного многочлена. Сформулировать оба случая с правильным знаком $\leq$ в резонансе. Сделать замену $u = e^{\mu t} Q$. Нерезонанс доказать обратимостью $\mu E - A$ и рекурсией старших коэффициентов. Резонанс — жордановой формой и последовательным интегрированием блока снизу вверх. Объяснить сохранение степени при невырожденной замене координат.

Проверка себя

1. При $A = \operatorname{diag}(1,2)$ найдите частное решение для правой части $e^{3t}(1,t)^{\mathsf{T}}$. *Ответ:* $u_p = e^{3t}(\frac{1}{2}, t-1)^{\mathsf{T}}$.
2. Для $A = 0$ и правой части $e^{0t}(t^2,1)^{\mathsf{T}}$ найдите Q. *Ответ:* $(\frac{t^3}{3}, t)^{\mathsf{T}}$; максимальная клетка имеет размер один.
3. У μ алгебраическая кратность пять, клетки размеров три и два, $N = 2$. Какую границу гарантирует теорема? *Ответ:* $\deg Q \leq 5$, а не 7.
4. Почему попытка $Q = t^2(a,b)^{\mathsf{T}}$ не решает пример с воздействием $(0,1)^{\mathsf{T}}$ и нильпотентной клеткой размера два? *Ответ:* нужно $Q = (\frac{t^2}{2}, t)^{\mathsf{T}}$; вторая координата должна иметь степень один.

Частые ошибки

Размер клетки и алгебраическая кратность не взаимозаменяемы. Степень многочлена — максимум по координатам, а не сумма. При резонансе теорема даёт верхнюю границу, не

обязательное равенство. Невырожденная замена сохраняет степень всего векторного многочлена, хотя степень отдельной компоненты может уменьшиться. Прямое скалярное правило $t^s Q_N$ без учёта связей между компонентами для систем не является универсальным.