БИЛЕТ 23

Общее решение ЛОС с постоянными коэффициентами

Источники: конспект лекций, с. 98-104; сборник, с. 100-104

Объём ответа: Построение по жордановым цепочкам и полное доказательство ФСР

Доработка по фотографиям: вопрос 21

IMG_2002–IMG_2007; главы 23.

Что требуется. Собственные и присоединённые векторы; три случая; построение и доказательство ФСР.

Для цепочки $v_0, \dots, v_{k-1}$ правильные условия $(A-\lambda E)v_0 = 0$, $(A-\lambda E)v_j = v_{j-1}$. Соответствующие решения:

$$x_j(t) = e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{j}\frac{t^r}{r!}v_{j-r}, \quad 0 \le j < k.$$

При дифференцировании получаем $x_j' = \lambda x_j + x_{j-1}$ для $j \ge 1$, а применение A даёт ровно это выражение. Для $j = 0$ обе части равны λx_0. В момент нуль решения равны векторам цепочки; все цепочки вместе составляют жорданов базис, значит полученные n решений независимы.

Кратное собственное значение не обязательно требует степеней t: у $A = 2E$ два независимых собственных вектора и две клетки размера один. У $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ одна клетка: решения $e^{2t}(1,0)^T$ и $e^{2t}(t,1)^T$. Для невещественных цепочек вещественной матрицы берём действительные и мнимые части сопряжённых решений.

Понять смысл

У скалярного уравнения постоянные коэффициенты приводят к характеристическим корням и функциям $t^j e^{\lambda t}$. В системе те же функции умножаются на векторы, причём векторы нельзя выбирать независимо: между ними действуют цепочные связи. Кратное собственное значение само по себе ещё не создаёт множитель t. Он возникает при нехватке собственных векторов, то есть при нетривиальной жордановой клетке.

Задача билета — построить *все* решения системы $\dot{u} = Au$, а не только проверить $e^{\lambda t}v$ для собственного вектора. Проверка одной экспоненты покрывает лишь диагонализируемый случай. Общий случай требует присоединённых векторов, проверки цепочной формулы и доказательства независимости всех построенных решений.

Точная формулировка и понятия

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — постоянная матрица. Характеристический многочлен — $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$; равенство $p(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением. Собственное значение λ имеет ненулевой собственный вектор h_1, если

$$(A - \lambda E)h_1 = 0.$$

Алгебраическая кратность — кратность корня p, геометрическая — размерность $\ker(A - \lambda E)$. Собственное значение называют полупростым, если эти кратности равны; эквивалентно, все его жордановы клетки имеют размер один.

Жорданова цепочка длины k для λ — векторы $h_1, \dots, h_k$, удовлетворяющие

$$h_1 \neq 0, \quad (A - \lambda E)h_1 = 0, \quad (A - \lambda E)h_j = h_{j-1} \quad (2 \le j \le k).$$

Они линейно независимы: если $\sum c_j h_j = 0$ и c_m — последний ненулевой коэффициент, применение $(A - \lambda E)^{m-1}$ даёт $c_m h_1 = 0$, противоречие.

Для каждой цепочки длины k определим k вектор-функций

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^r}{r!} h_{j-r}, \qquad 1 \le j \le k.$$

В частности,

$$u_1 = e^{\lambda t} h_1, \quad u_2 = e^{\lambda t}(h_2 + t h_1), \quad u_3 = e^{\lambda t}\left(h_3 + t h_2 + \frac{t^2}{2} h_1\right).$$

Теорема. Если цепочки в совокупности составляют жорданов базис $\mathbb{C}^n$, то соответствующие n функций составляют ФСР системы. Все решения — их линейные комбинации с постоянными коэффициентами. Если k_λ — максимальный размер клетки для λ, то компактная запись имеет вид

$$u(t) = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} e^{\lambda t} P_\lambda(t), \qquad \deg P_\lambda \le k_\lambda - 1.$$

Коэффициенты векторных многочленов связаны цепочками и зависят суммарно от n произвольных постоянных. Это не набор произвольных независимых многочленов указанной степени.

Откуда берётся жорданов базис

Для ОДУ можно использовать теорему Жордана из линейной алгебры. Следующее короткое обоснование показывает, какая конструкция за ней стоит. Пространство раскладывается в прямую сумму обобщённых собственных подпространств

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda G_\lambda, \qquad G_\lambda = \ker(A - \lambda E)^{m_\lambda},$$

где m_λ — алгебраическая кратность. Это следствие теоремы Гамильтона-Кэли и тождества Безу для попарно взаимно простых множителей $(z - \lambda)^{m_\lambda}$: существуют полиномиальные проекторы, равные единице по одному из этих модулей и нулю по остальным. После подстановки $z = A$ их сумма равна E, образы лежат в соответствующих G_λ, а попарные произведения равны нулю. Поэтому разложение существует и единственно.

На G_λ оператор $N = A - \lambda E$ нильпотентен. Докажем индукцией по размерности, что для любого нильпотентного N существует базис цепочек. При $N = 0$ любой базис состоит из цепочек длины один. В остальных случаях пространство $W = NV$ имеет меньшую размерность и инвариантно относительно N. По предположению индукции выберем в W цепочный базис $w_{i,1}, \dots, w_{i,k_i}$. Каждый последний вектор w_{i,k_i} принадлежит NV, поэтому имеет прообраз $v_i \in V$. Добавим этот прообраз в конец цепочки: $Nv_i = w_{i,k_i}$.

Полученные удлинённые цепочки независимы. Действительно, применение N к линейной комбинации их векторов уничтожает лишь первые векторы, а образы остальных составляют базис W; их коэффициенты поэтому нулевые. Остаётся комбинация первых векторов исходных цепочек, которые также независимы. Пусть U — линейная оболочка удлинённых цепочек. Тогда $NU = W = NV$. Для каждого $v \in V$ найдётся $u \in U$ с $Nu = Nv$, значит $v - u \in \ker N$ и $V = U + \ker N$. Дополнив базис $U \cap \ker N$ до базиса $\ker N$, добавляем недостающие цепочки длины один. Получен базис всего V. Применение этой конструкции в каждом G_λ даёт жорданов базис.

Практически цепочки находят решением линейных систем с матрицей $A - \lambda E$. Уравнение для присоединённого вектора — *матричное* $(A - \lambda E)h_2 = h_1$; определитель вместо матрицы здесь недопустим. Не каждый выбранный собственный вектор обязательно можно продолжить в цепочку нужной длины: нужно проверять, принадлежит ли он соответствующему образу.

Доказательство теоремы о решениях

Положим $h_0 = 0$ и обозначим полиномиальную сумму в u_j через $v_j(t)$. Из определения цепочки

$$(A - \lambda E)v_j = \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^r}{r!} h_{j-r-1} = v_j'(t).$$

Последнее слагаемое в первой сумме содержит h_0 и исчезает; остальные совпадают с производной после смены индекса. Поэтому

$$\dot{u}_j = e^{\lambda t}(\lambda v_j + v_j') = e^{\lambda t}(\lambda E + A - \lambda E)v_j = Au_j.$$

Это проверка каждого построенного решения, включая присоединённые.

Число функций равно сумме длин всех цепочек, то есть n. При $t = 0$ имеем $u_j(0) = h_j$. Следовательно, матрица $X(0)$ из их значений состоит из векторов жорданова базиса и обратима. Значит, решения линейно независимы и образуют ФСР. Для любого начального вектора $u(0) = u_0$ система $X(0)C = u_0$ имеет единственное решение; функция $X(t)C$ удовлетворяет задаче Коши, а по единственности других решений нет. Так доказывается именно полнота общего решения.

Если $A = SJS^{-1}$, тот же результат записывается

$$u(t) = Se^{Jt}C, \qquad e^{J_k t} = e^{\lambda t}\left(E + tN + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}\right),$$

где $J_k = \lambda E + N$, $N^k = 0$. Нормированная фундаментальная матрица равна $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, и решение с данными в t_0 есть $e^{A(t-t_0)}u_0$.

Как получить вещественное решение

Если A вещественна, вещественным корням можно выбрать вещественные цепочки. Для сопряжённых корней $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, цепочки выбираются сопряжёнными. Взяв для каждого решения одной цепочки вещественную и мнимую части, получаем вещественные решения.

Например, при $h = p + iq$ и $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda t}h) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t),$$

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda t}h) = e^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t).$$

Они независимы в составе вещественной ФСР: переход от сопряжённой пары к вещественной и мнимой частям задаётся обратимой постоянной матрицей. Отдельно доказывать независимость длинными тригонометрическими вычислениями не нужно.

Пример: трёхзвенная цепочка

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Единственное собственное значение 2 имеет алгебраическую кратность три, но собственное подпространство одномерно. Стандартные векторы образуют цепочку $h_1 = e_1, h_2 = e_2, h_3 = e_3$. Общее решение:

$$u(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + \frac{C_3 t^2}{2} \\ C_2 + C_3 t \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

При $u(0) = (0,0,1)^{\mathsf{T}}$ получаем $e^{2t}(\frac{t^2}{2}, t, 1)^{\mathsf{T}}$. При $C_3 = 0$ степень полиномиального множителя снижается, а при $C_2 = C_3 = 0$ остаётся чистая экспонента. Поэтому утверждение «степень каждого решения равна двум» ошибочно.

Для сравнения, у $A = 2E$ собственное значение тоже трёхкратное, но все три клетки имеют размер один и $u = e^{2t}C$. Алгебраическая кратность одинакова, структура решений различна.

Ответ у доски

Определить собственный и присоединённый векторы, цепочку, жорданов базис. Написать общую формулу u_j. Проверить $v_j' = (A - \lambda E)v_j$, затем $\dot{u}_j = Au_j$. Подставить $t = 0$ и использовать базисность цепочек. Сослаться на единственность для полноты. Для вещественной матрицы объяснить переход к вещественным и мнимым частям.

Проверка себя

1. Решите $\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$. *Ответ:* $u = (C_1 + C_2 t, C_2)^{\mathsf{T}}$.

2. Достаточно ли знать, что у матрицы порядка четыре единственный корень -1 кратности четыре, чтобы назвать максимальную степень t? *Ответ:* нет; нужны размеры клеток. Возможная максимальная степень — от нуля до трёх.
3. Для $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ выпишите вещественную ФСР. *Ответ:* $(\cos t, \sin t)^{\mathsf{T}}$ и $(-\sin t, \cos t)^{\mathsf{T}}$.
4. Почему для одной цепочки нельзя заменить $\frac{t^2}{2}$ на t^2? *Ответ:* производная должна совпасть с предыдущим звеном; без факториала коэффициент при th_1 станет равен двум.

Частые ошибки

Не путать характеристический многочлен с уравнением. Не подменять матричное произведение определителем. Не считать кратный корень достаточным основанием для множителя t. Не ограничиваться доказательством экспоненциального решения. Не объявлять коэффициенты всех P_λ независимыми. Степень в общем решении ограничена сверху размером наибольшей клетки минус один и может снижаться при специальных начальных данных.