БИЛЕТ 22

Интегральная формула Коши

Источники: конспект лекций, с. 93-94, 97; сборник, с. 97-99

Объём ответа: Полное построение ядра и доказательство формулы дифференцированием

Доработка по фотографиям: вопрос 20

IMG_1999–IMG_2001; главы 22.

Что требуется. Построить ядро и доказать формулу; незавершённый пример с тангенсом.

Среди файлов нет IMG_2000; IMG_1999 и IMG_2001 непосредственно продолжают одно доказательство. Для нормированного уравнения порядка n ядро $K(x,s)$ решает ЛОУ по x и имеет $K = K_x = \cdots = K_x^{(n-2)} = 0$, $K_x^{(n-1)} = 1$ при $x = s$. Последовательное дифференцирование $y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,s) f(s)\,ds$ до порядка n даёт граничный член $f(x)$ только на последнем шаге. Остаток интеграла уничтожается оператором L.

Дописанный пример тетради: $y'' + 4y = \tan x$. ФСР $\cos 2x, \sin 2x$; ядро

$$K(x,s) = \tfrac{1}{2}\sin 2(x-s), \qquad y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin 2(x-s)\tan s\,ds.$$

x_0 и x должны лежать в одном интервале $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$. Вычислять интеграл для записи решения не требуется. При $n = 1$ единственное условие ядра — $K(s,s) = 1$; нулевого условия нет.

Понять смысл

Метод предыдущего билета использует специальный вид правой части и постоянство коэффициентов. Интегральная формула Коши работает для произвольной непрерывной правой части и непрерывных переменных коэффициентов. Она складывает отклики однородного уравнения на воздействия, приложенные в разные моменты. Слово «отклик» здесь помогает интуиции; доказательство опирается только на обычные производные, ФСР и правило Лейбница.

Особые начальные условия ядра устроены так, что первые $n-1$ дифференцирований интеграла не создают граничного члена, а при n-м появляется ровно $f(x)$. Именно это и требуется для неоднородного уравнения порядка n.

Точная формулировка

Пусть I — интервал, $x_0 \in I$, $a_0, \ldots, a_{n-1}, f \in C(I)$ и

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x).$$

Старший коэффициент нормирован к единице. Если исходно он равен $a_n(x) \neq 0$, сначала всё уравнение делят на a_n, включая правую часть.

Для каждого $\tau \in I$ *функцией Коши* называется решение $K(x,\tau)$ однородного уравнения по переменной x, удовлетворяющее условиям

$$\partial_x^j K(\tau,\tau) = 0 \quad (0 \le j \le n-2), \qquad \partial_x^{n-1} K(\tau,\tau) = 1.$$

При $n = 1$ первого набора условий нет, а последнее означает $K(\tau,\tau) = 1$. Этот крайний случай нельзя подменять условием $K(\tau,\tau) = 0$.

Тогда единственное решение задачи с нулевыми начальными данными

$$y^{(j)}(x_0) = 0, \qquad 0 \le j \le n-1,$$

имеет вид

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Формула верна для x по обе стороны от x_0; интеграл при $x < x_0$ понимается с обычной ориентацией. Для ненулевых начальных данных к y_p прибавляют решение однородной задачи с этими данными.

Построение ядра и необходимая регулярность

Пусть $y_1, \dots, y_n$ — ФСР однородного уравнения и

$$X(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Её определитель нигде не равен нулю на I. Ищем $K(x,\tau) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\tau) y_j(x)$ и решаем

$$X(\tau) c(\tau) = e_n, \qquad c(\tau) = X(\tau)^{-1} e_n,$$

где e_n — последний вектор стандартного базиса. Это одновременно доказывает существование, единственность и возможность вычисления ядра.

Поскольку X непрерывна и обратима, её обратная матрица непрерывна. Все y_j принадлежат $C^n(I)$. Следовательно, $K, \partial_x K, \dots, \partial_x^n K$ совместно непрерывны по (x,τ). На любом компактном подинтервале можно применять правило дифференцирования интеграла с параметром. Производные коэффициентов a_j и правой части f для этого не нужны. Этот момент важен: неверное дифференцирование f искусственно усилило бы условия теоремы.

Доказательство интегральной формулы

Обозначим правую часть формулы через $Y(x)$. При $n \ge 2$ правило Лейбница даёт

$$Y'(x) = K(x,x) f(x) + \int_{x_0}^{x} \partial_x K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{x_0}^{x} \partial_x K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Здесь диагональное значение $K(x,x)$ равно нулю. Прежде чем дифференцировать ещё раз, граничный член уже заменён тождественным нулём. Поэтому не возникает ни f', ни производной функции $K(x,x)$.

Индукцией получаем

$$Y^{(j)}(x) = \int_{x_0}^{x} \partial_x^j K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad 0 \le j \le n-1.$$

На шаге от $j-1$ к $j \le n-1$ граничный член равен $\partial_x^{j-1} K(x,x) f(x) = 0$. Следующее дифференцирование отличается:

$$Y^{(n)}(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} \partial_x^n K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

поскольку $\partial_x^{n-1} K(x,x) = 1$. Для $n = 1$ именно эта формула получается сразу при первом дифференцировании; промежуточный индукционный этап пуст.

Теперь подставляем в $L[Y]$. Коэффициенты $a_j(x)$ не зависят от переменной интегрирования и объединяются под одним интегралом:

$$\begin{aligned} L[Y](x) &= f(x) + \int_{x_0}^{x} \left(\partial_x^n K + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \partial_x^j K \right) f(\tau)\, d\tau \\ &= f(x) + \int_{x_0}^{x} L_x[K(x,\tau)] f(\tau)\, d\tau = f(x). \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю по определению ядра. Кроме того, при $x = x_0$ все интегралы для $Y^{(j)}$, $j < n$, имеют одинаковые пределы и равны нулю. Следовательно, выполнены и уравнение, и все начальные условия. Единственность следует из теоремы для линейной задачи Коши. Доказательство закончено.

Как решать задачи

Для второго порядка особенно удобна готовая формула. Если y_1, y_2 — ФСР, а $W(\tau) = y_1(\tau) y_2'(\tau) - y_1'(\tau) y_2(\tau)$, то

$$K(x,\tau) = \frac{y_1(\tau) y_2(x) - y_2(\tau) y_1(x)}{W(\tau)}.$$

Проверка в точке $x = \tau$ даёт $K = 0$ и $K_x = 1$. Знак числителя важен: перестановка двух слагаемых без изменения знаменателя поменяет f на $-f$.

Для постоянных коэффициентов ядро зависит только от разности $x - \tau$: $K(x,\tau) = k(x-\tau)$, где k решает однородное уравнение с указанными начальными данными в нуле. Для переменных коэффициентов эту зависимость предполагать нельзя. Примеры:

$$\begin{aligned} &y'' + \omega^2 y = f, && K = \frac{\sin \omega(x-\tau)}{\omega}, \quad \omega > 0, \\ &y'' = f, && K = x - \tau, \\ &y' + a(x) y = f, && K = \exp\left(-\int_{\tau}^{x} a(s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Интегральная запись уже является точным решением; отсутствие элементарной первообразной не означает, что задача не решена.

Пример с вычислением интеграла

Рассмотрим

$$y'' + 4y = \tan 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Интервал выбран так, чтобы правая часть была непрерывна и содержался $x_0 = 0$. Из ФСР $\cos 2x, \sin 2x$ получаем $W = 2$ и

$$K(x,\tau) = \frac{1}{2}\sin 2(x-\tau).$$

По формуле Коши

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-\tau)\tan 2\tau\, d\tau.$$

Раскрывая синус разности, используем

$$\int_0^x \cos 2\tau \tan 2\tau\, d\tau = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\int_0^x \sin 2\tau \tan 2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\ln(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Вторая формула следует из $\frac{\sin^2 z}{\cos z} = \sec z - \cos z$. Итог:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \ln(\sec 2x + \tan 2x).$$

На выбранном интервале аргумент логарифма положителен. В произвольном интервале непрерывности удобнее писать модуль. Значения $y_p(0) = y_p'(0) = 0$ проверяются непосредственно; уравнение уже обосновано общим доказательством.

Ответ у доски

Начать с нормированного уравнения и непрерывности коэффициентов. Определить ядро как решение однородной задачи при $x = \tau$. Объяснить его построение через обратимую матрицу Вронского. Дифференцировать интеграл до порядка n, отдельно указав единственный ненулевой граничный член. Сгруппировать интегралы в $L_x K = 0$ и проверить начальные данные.

Проверка себя

1. Найдите ядро для $y'' - y = f$. *Ответ:* $K(x,\tau) = \sinh(x-\tau)$.
2. Решите $y'' = x$, $y(0) = y'(0) = 0$ через ядро. *Ответ:* $\int_0^x (x-\tau)\tau\, d\tau = \frac{x^3}{6}$.
3. Как изменяется формула для $2y'' + 2y = f$? *Ответ:* после деления на 2 получается $\frac{1}{2}\int_{x_0}^x \sin(x-\tau) f(\tau)\, d\tau$ плюс решение однородной задачи с начальными данными.
4. Для $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ найдите решение. *Ответ:* $2\cos x + 3\sin x + \int_0^x \sin(x-\tau)\, d\tau = 1 + \cos x + 3\sin x$.

Частые ошибки

Верхний предел интеграла — независимая переменная x. Производные ядра берутся по первому аргументу; запись $K_x(\tau,\tau)$ не означает полную производную вдоль диагонали.

Условие последней производной ядра равно единице только после нормировки старшего коэффициента. Для $n = 1$ ядро на диагонали равно единице. На интервале с разрывом f, например через полюс тангенса, сформулированная теорема не применяется.