БИЛЕТ 21

ЛНУ с квазимногочленом в правой части

Источники: конспект лекций, с. 88-92; сборник, с. 94-96

Объём ответа: Полное доказательство формы частного решения и резонансного множителя

Доработка по фотографиям: вопрос 19

IMG_1996–IMG_1998; главы 21.

Что требуется. Определение, суперпозиция, теорема о частном решении с доказательством.

Для $L(D)y = e^{\mu x}P_N(x)$, $P_N \neq 0$, пусть s — кратность μ как корня L; при отсутствии корня $s = 0$. Ищем $y_p = e^{\mu x}x^s Q_N(x)$. После смещения и разложения $L(z) = (z-\mu)^s M(z)$ получаем

$$M(D+\mu)D^s(x^s Q_N) = P_N.$$

Оператор $Q \mapsto D^s(x^s Q)$ диагонален на мономах с ненулевыми коэффициентами $(s+j)!/j!$. Оператор $M(D+\mu)$ треугольен с диагональю $M(\mu) \neq 0$. Оба обратимы, поэтому выбранный Q_N существует и единственен. Сравнение старших коэффициентов даёт $q_N = p_N N!/[M(\mu)(N+s)!] \neq 0$.

Для вещественной тригонометрической правой части берём оба полинома:

$$x^s e^{\alpha x}(A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x).$$

Их отдельные фактические степени могут оказаться меньше N. Не пропускаем младшие степени и не называем найденные коэффициенты произвольными постоянными общего решения.

Понять смысл

Метод неопределённых коэффициентов работает не потому, что удаётся угадать удачную функцию. За ним стоит конечномерная линейная алгебра: дифференцирование сохраняет пространство многочленов ограниченной степени, а умножение на экспоненту заменяет оператор D на $D+\mu$. Поэтому специальная правая часть позволяет искать специальное частное решение, решая конечную систему алгебраических уравнений.

Если показатель экспоненты совпадает с характеристическим корнем, обычная пробная функция пересекается с пространством однородных решений. Возникает резонанс: для получения ненулевой правой части нужно добавить степени x. Число необходимых степеней определяется *кратностью данного корня*, а не порядком всего уравнения и не степенью многочлена справа.

Точная формулировка

Пусть

$$L(D)y = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y, \qquad a_n \neq 0,$$

где все коэффициенты постоянны, $D = \frac{d}{dx}$, а $L(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_0$. *Комплексным квазимногочленом* называется функция $e^{\mu x}P(x)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, P — многочлен. Конечные суммы таких функций также часто называют квазимногочленами; выбранное соглашение нужно проговорить. При вещественных коэффициентах практическая форма имеет вид

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x).$$

Она получается взятием вещественной части комплексного выражения с $\mu = \alpha + i\beta$.

Пусть $P_N \not\equiv 0$ имеет степень N, а s — кратность μ как корня L; если $L(\mu) \neq 0$, полагаем $s = 0$. Тогда уравнение

$$L(D)y = e^{\mu x}P_N(x)$$

имеет частное решение

$$y_p(x) = e^{\mu x}x^s Q_N(x), \qquad \deg Q_N = N.$$

Многочлен Q_N в этом специально выбранном виде определяется однозначно. Это не означает единственности частного решения вообще: к нему можно прибавить любое решение однородного уравнения.

Если y_p — одно частное решение, все решения имеют вид $y = y_h + y_p$, где $L(D)y_h = 0$. Действительно, $L(D)(y - y_p) = 0$; обратно, линейность даёт $L(D)(y_h + y_p) = f$. Для вещественного уравнения выбирают вещественную ФСР и вещественное частное решение.

Доказательство

1. Снять экспоненту. Для любой достаточно гладкой функции v справедливо

$$D(e^{\mu x}v) = e^{\mu x}(D + \mu)v.$$

Последовательное применение этого равенства даёт $D^k e^{\mu x}v = e^{\mu x}(D + \mu)^k v$, а линейная комбинация — формулу смещения

$$L(D)(e^{\mu x}v) = e^{\mu x}L(D + \mu)v.$$

Следовательно, достаточно найти $v = x^s Q_N$ из уравнения $L(D + \mu)v = P_N$.

2. Выделить кратность. Разложим характеристический многочлен:

$$L(\lambda) = (\lambda - \mu)^s M(\lambda), \qquad M(\mu) \neq 0.$$

Тогда

$$L(D + \mu) = D^s M(D + \mu) = M(D + \mu)D^s.$$

Перестановка законна: оба множителя являются многочленами от одного оператора D с постоянными коэффициентами. Для переменных коэффициентов такое рассуждение обычно неверно.

3. Обратить два конечномерных оператора. Обозначим через $\mathcal{P}_N$ пространство многочленов степени не выше N. Отображение

$$Q \longmapsto R = D^s(x^s Q)$$

переводит $\mathcal{P}_N$ в себя и обратимо, поскольку на базисных мономах

$$D^s(x^{s+j}) = \frac{(s+j)!}{j!}x^j, \qquad 0 \le j \le N,$$

все множители ненулевые. Теперь нужно решить $M(D+\mu)R = P_N$. Разложение по степеням D имеет вид

$$M(D+\mu) = M(\mu) + b_1 D + \cdots + b_{n-s}D^{n-s}.$$

В базисе $1, x, \dots, x^N$ матрица этого оператора треугольна: производные понижают степень, а на диагонали стоит ненулевое число $M(\mu)$. Поэтому оператор обратим на $\mathcal{P}_N$.

Можно обойтись без термина «треугольная матрица». Сначала приравниваем старшие коэффициенты, затем коэффициенты при x^{N-1} и далее. На каждом шаге единственный новый коэффициент умножен на $M(\mu) \neq 0$; остальные уже найдены. Получаем единственные R и Q.

4. Проверить именно степень. Если $P_N = p_N x^N + \cdots$, $p_N \neq 0$, и $Q = q_N x^N + \cdots$, то сравнение старших членов даёт

$$M(\mu)\frac{(N+s)!}{N!}q_N = p_N, \qquad q_N = \frac{p_N N!}{M(\mu)(N+s)!} \neq 0.$$

Значит, степень Q равна N, а не только не превышает N. Подстановка обратно через формулу смещения завершает доказательство. Смысл множителя x^s теперь ясен: он компенсирует s дифференцирований, появившихся из-за корня характеристического многочлена.

Как решать задачи

1. Найти $L(\lambda)$ и общее однородное решение. Разложить правую часть в сумму удобных квазимногочленов.
2. Для каждого показателя μ отдельно определить его кратность s. У многочлена без экспоненты $\mu = 0$.
3. Записать полный многочлен степени N с неизвестными коэффициентами, включая младшие степени, даже если справа некоторые из них отсутствуют.
4. Для $e^{\alpha x}(P\cos\beta x + R\sin\beta x)$ при $\beta \neq 0$ брать

   $$x^s e^{\alpha x}\left(A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x\right), \quad N = \max(\deg P, \deg R).$$

   Оба многочлена нужны: дифференцирование смешивает синус и косинус. Здесь степени искомых вещественных многочленов могут оказаться ниже N.
5. Найти коэффициенты, сложить частные решения, прибавить однородное, затем использовать начальные условия. Проверить исходное уравнение, а не только преобразованную систему коэффициентов.

Пример: двукратный резонанс

Решим

$$y'' - 2y' + y = e^x(x+1).$$

Здесь $L(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, $\mu = 1$, $s = 2$, $N = 1$. Поэтому пробуем $y_p = e^x x^2 (Ax + B)$. Быстрее снять экспоненту: при $y = e^x v$ получаем

$$(D-1)^2 (e^x v) = e^x v'', \qquad v'' = x + 1.$$

Для частного решения берём $v = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$; константы интегрирования пока не добавляем, поскольку они войдут в однородную часть. Итак,

$$y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right).$$

Проверка: вторая производная выражения в скобках равна $x + 1$. Если дополнительно $y(0) = y'(0) = 0$, то $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 = 0$, значит $C_2 = 0$.

Для сравнения, у $y'' + y = \cos x$ показатель i — простой корень; частное решение равно $\frac{x}{2} \sin x$. Множитель x приводит к неограниченному росту амплитуды. Это конкретный резонанс, а не общее правило «тригонометрическая правая часть всегда даёт ограниченное решение».

Ответ у доски

Назвать квазимногочлен и кратность s. Сформулировать $y_p = e^{\mu x} x^s Q_N$. Написать формулу смещения и разложение $L(D + \mu) = M(D + \mu) D^s$. Объяснить обратимость $Q \mapsto D^s (x^s Q)$ и треугольность второго оператора. Закончить формулой старшего коэффициента и напомнить $y = y_h + y_p$.

Проверка себя

1. Найдите частное решение $y'' - y = e^{2x}(x + 1)$. *Ответ:* $e^{2x}(\frac{x}{3} - \frac{1}{9})$; после снятия экспоненты действует $D^2 + 4D + 3$.
2. Выберите пробный вид для $y''' - y'' = x^2$. *Ответ:* $x^2 (Ax^2 + Bx + C)$, поскольку 0 — двукратный корень $\lambda^2 (\lambda - 1)$.
3. Найдите частное решение $y'' + 4y = \sin 2x$. *Ответ:* $-\frac{x}{4} \cos 2x$.
4. Для каких вещественных a уравнение $y'' + ay = \cos x$ имеет хотя бы одно периодическое решение? *Ответ:* при $a \neq 1$ подходит $\frac{\cos x}{a-1}$; при $a = 1$ резонансный член $\frac{x \sin x}{2}$ нельзя устранить однородным решением.

Частые ошибки

Не заменять кратность s порядком уравнения. Не терять младшие коэффициенты пробного многочлена. Не добавлять к $x^s Q_N$ лишние произвольные постоянные: выбранный представитель уже однозначен. Не смешивать существование одного периодического решения с ограниченностью всех решений. Формулировка и доказательство выше проверены математически; это рабочее изложение лекционного материала и содержания страниц 94-96 сборника, а не дословная цитата действующего билета.