БИЛЕТ 20

Кратные характеристические корни. Формула смещения

Источники: Лекции: PDF 81-82, 84-87; основной сборник: PDF 89-93; старый вопросник: PDF 41-42

Объём ответа: Доказать формулу смещения, принадлежность построенных функций решениям и их линейную независимость. В печатном вопросе сборника слово «некратных» является опиской; содержание посвящено кратным корням.

Доработка по фотографиям: вопрос 18

IMG_1993–IMG_1995; главы 20.

Что требуется. Доказать формулу смещения, построить решения для кратного корня, доказать независимость.

Из $D(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}(D+\lambda)v$ последовательным применением и линейностью получаем

$$L(D)(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}L(D+\lambda)v.$$

Если $L(z) = (z-\lambda)^k M(z)$, $M(\lambda) \neq 0$, то $L(D+\lambda) = M(D+\lambda)D^k$. Для $v = x^j$, $0 \leq j < k$, производная $D^k v = 0$, поэтому $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ являются решениями.

Независимость разных экспоненциальных блоков доказывается так: разделить предполагаемое тождество на одну экспоненту и продифференцировать столько раз, чтобы уничтожить её полиномиальный блок. На остальных блоках действует степень $D+\alpha$ с $\alpha \neq 0$; этот оператор обратим на многочленах ограниченной степени. Индукция по числу различных корней даёт нулевые полиномы во всех блоках. Общее число функций равно сумме кратностей, то есть порядку уравнения.

Понять смысл

Если у уравнения второго порядка характеристический корень λ двойной, одна функция $e^{\lambda x}$ не может описать все решения с двумя независимыми начальными данными. Повторить её два раза бесполезно: одинаковые функции зависимы. Второе решение возникает после умножения на x. В общем случае корень кратности k даёт цепочку

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Причина алгебраическая: множитель $(D-\lambda)^k$ после вынесения экспоненты превращается в обычную k-ю производную. Она уничтожает любой многочлен степени меньше k. Но, как и в предыдущем билете, проверка уравнения ещё не доказывает полноту семейства. Отдельно нужна независимость цепочек, соответствующих разным корням.

Операторы и формула смещения

Пусть

$$L(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0,$$

где все коэффициенты постоянны, а $g \in C^n(I)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$L(D)(e^{\lambda x} g(x)) = e^{\lambda x} L(D+\lambda) g(x).$$

Здесь $L(D+\lambda)$ означает буквальную подстановку оператора $D+\lambda$ вместо аргумента многочлена. Например, при $L(D) = D^2 - 3D + 2$ получаем

$$L(D+\lambda) = D^2 + (2\lambda - 3)D + (\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Сдвигается аргумент *всего* многочлена, а не только его свободный член.

Доказательство формулы смещения. По правилу произведения

$$D(e^{\lambda x} g) = e^{\lambda x}(g' + \lambda g) = e^{\lambda x}(D+\lambda) g.$$

Докажем индукцией $D^k(e^{\lambda x} g) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k g$. При $k = 0$ это тождество, при $k = 1$ уже доказано. Если равенство верно для $k < n$, ещё раз дифференцируем и применяем равенство первого порядка к функции $(D+\lambda)^k g$:

$$D^{k+1}(e^{\lambda x} g) = D(e^{\lambda x}(D+\lambda)^k g) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^{k+1} g.$$

Суммируя эти равенства с коэффициентами a_k, получаем формулу для L. Указанной гладкости достаточно для всех выполненных дифференцирований.

Многочлены от D с постоянными коэффициентами коммутируют: $P(D)Q(D) = Q(D)P(D)$ на достаточно гладких функциях. Это следует из $D^i D^j = D^{i+j}$. Для операторов с переменными коэффициентами аналогичная перестановка в общем случае неверна: например, $D(xg) = xDg + g$.

Точная теорема о кратных корнях

Пусть $L(D)y = 0$ есть уравнение порядка n с постоянными вещественными или комплексными коэффициентами и $a_n \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ есть все различные комплексные корни L, а их кратности равны $k_1, \dots, k_m$, так что

$$L(z) = a_n \prod_{i=1}^{m} (z - \lambda_i)^{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Тогда функции

$$x^r e^{\lambda_i x}, \qquad i = 1, \dots, m, \quad r = 0, \dots, k_i - 1,$$

образуют комплексную ФСР. Все решения имеют вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i x} P_i(x), \qquad P_i(x) = \sum_{r=0}^{k_i - 1} C_{i,r} x^r.$$

Многочлен P_i имеет степень *не выше* $k_i - 1$ и может быть нулевым. Утверждение не требует, чтобы в каждом конкретном решении все старшие коэффициенты были ненулевыми.

Доказательство: каждая функция является решением

Зафиксируем корень λ_i кратности k_i. Тогда

$$L(z) = (z - \lambda_i)^{k_i} M_i(z), \qquad M_i(\lambda_i) \neq 0.$$

При сдвиге

$$L(D + \lambda_i) = D^{k_i} M_i(D + \lambda_i) = M_i(D + \lambda_i) D^{k_i}.$$

Для $0 \leq r < k_i$ формула смещения даёт

$$L(D)(e^{\lambda_i x} x^r) = e^{\lambda_i x} M_i(D + \lambda_i) D^{k_i} x^r = 0,$$

так как k_i-я производная многочлена степени $r < k_i$ равна нулю. Всего построено $\sum_i k_i = n$ решений.

Почему не добавляют $x^{k_i} e^{\lambda_i x}$? Для него $D^{k_i} x^{k_i} = k_i!$, поэтому тот же расчёт даёт

$$L(D)(e^{\lambda_i x} x^{k_i}) = e^{\lambda_i x} k_i! M_i(\lambda_i) \neq 0.$$

Так видна точная граница цепочки, а не только удобный выбор нескольких решений.

Доказательство независимости: все логические шаги

Докажем более общую лемму: если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны, а P_i являются многочленами, то тождество

$$\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i x} P_i(x) \equiv 0$$

на непустом открытом интервале возможно лишь при $P_i \equiv 0$ для всех i.

При $m = 1$ делим на нигде не нулевую экспоненту и получаем $P_1 = 0$ на интервале. Многочлен, равный нулю на интервале, тождественно нулевой.

Предположим, что лемма верна для $m - 1$ различных показателей. Разделим тождество с m слагаемыми на $e^{\lambda_m x}$:

$$\sum_{i<m} e^{\mu_i x} P_i(x) + P_m(x) = 0, \qquad \mu_i = \lambda_i - \lambda_m \neq 0.$$

Выберем натуральное r больше степени P_m; если $P_m = 0$, можно взять любое $r \geq 1$. Продифференцируем r раз. Последний многочлен исчезает, а формула смещения даёт

$$\sum_{i<m} e^{\mu_i x} Q_i(x) = 0, \qquad Q_i = (D + \mu_i)^r P_i.$$

Показатели μ_i попарно различны, поэтому по предположению индукции все Q_i нулевые.

Теперь принципиальный шаг: при $\mu \neq 0$ оператор $D + \mu$ не может превратить ненулевой многочлен в нулевой. Если старший член P равен ax^d, то старший член $P' + \mu P$ равен $\mu a x^d$, поскольку производная имеет меньшую степень. После r применений старший коэффициент равен $\mu^r a \neq 0$. Следовательно, $Q_i = 0$ влечёт $P_i = 0$ для каждого $i < m$. Возвращаясь в исходное тождество, получаем $e^{\lambda_m x} P_m = 0$, значит, $P_m = 0$. Индукция завершена.

Применим лемму к предполагаемой линейной связи между $x^r e^{\lambda_i x}$. Сгруппировав коэффициенты одного показателя в P_i, получим, что каждый P_i нулевой. Тогда все его

коэффициенты $C_{i,r}$ равны нулю. Независимость доказана. Построены ровно n независимых решений; общая теорема ЛОУ завершает доказательство ФСР и общего решения.

Этот аргумент работает и для комплексных корней. Рассуждение о том, какая экспонента «быстрее растёт», здесь хуже: у различных чисто мнимых корней нет порядка по скорости роста, а дифференцирование и старший коэффициент работают без такого ограничения.

Вещественная форма при комплексных кратных корнях

При вещественных коэффициентах корни $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, имеют одинаковую кратность k. Вместо двух комплексных цепочек выбирают $2k$ вещественных функций

$$x^r e^{\alpha x}\cos \beta x, \qquad x^r e^{\alpha x}\sin \beta x, \qquad r = 0, \dots, k-1.$$

Это вещественные и мнимые части цепочек. Их независимость следует из обратимого перехода от сопряжённых экспонент. Для вещественного корня кратности k берут одну цепочку из k функций, а для сопряжённой пары кратности k каждая берут две цепочки, всего $2k$ функций.

Например, многочлен $(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)$ даёт вещественное общее решение

$$y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Здесь четыре независимые постоянные, как и должно быть для уравнения четвёртого порядка. Многочлен $(\lambda^2+4)^2$ дал бы вместо этого

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

Степень многочлена одна и та же, но кратности отдельных корней и соответствующие цепочки различаются.

Разобранная задача Коши

Решим

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Характеристический многочлен $(\lambda-1)^3$ имеет единственный корень 1 кратности три. Значит,

$$y = e^x P(x), \qquad P = C_1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

Чтобы не допустить ошибок в производных, используем $y' = e^x(P + P')$, $y'' = e^x(P + 2P' + P'')$. Начальные условия дают

$$C_1 = 1, \qquad C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0.$$

Отсюда $C_2 = -1$, $C_3 = \frac{1}{2}$, поэтому

$$y(x) = e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Проверка самого уравнения коротка и содержательна:

$$(D-1)^3(e^x P) = e^x D^3 P = 0.$$

Начальные данные проверяются уже найденными формулами. Обращает внимание множитель $2C_3$ в P'': забытый фактор 2 часто портит ответ даже при верно выбранной ФСР.

Ответ у доски

Построить ответ из трёх доказательств. Первое: правило произведения, затем индукция дают формулу смещения. Второе: разложение $L(z) = (z-\lambda)^k M(z)$ после смещения оставляет D^k, уничтожающее x^r при $r < k$. Третье: сгруппировать предполагаемую зависимость в многочлены, разделить на одну экспоненту, убрать соответствующий многочлен дифференцированием и объяснить сохранение ненулевого старшего коэффициента остальных. Закончить подсчётом числа функций и теоремой об общем решении.

Проверка себя

1. Запишите ФСР для $D^2(D+2)^3 y = 0$. **Ответ:** $1, x, e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}$.
2. Вычислите $(D-3)^2(x^2e^{3x})$. **Ответ:** $2e^{3x}$; функция не решает соответствующее однородное уравнение.
3. Решите $(D^2+1)^2 y = 0$ в вещественной форме. **Ответ:** $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.
4. Почему из $(D+\mu)^r P = 0$ для многочлена P следует $P = 0$ при $\mu \neq 0$, но не при $\mu = 0$? **Ответ:** в первом случае ненулевой старший коэффициент умножается на μ^r; во втором обычная производная уничтожает многочлены степени меньше r.

Частые ошибки

Повторять одинаковую экспоненту вместо цепочки; начинать цепочку с x и терять $e^{\lambda x}$; заканчивать её степенью k вместо $k-1$; путать кратность корня и общее число различных корней; сдвигать только часть оператора; доказывать принадлежность решениям и объявлять независимость очевидной; считать степень P_i обязательно равной $k_i - 1$; забывать отдельную синусную цепочку у кратной комплексной пары.