БИЛЕТ 19

Характеристический многочлен. Некратные корни

Источники: Лекции: PDF 79-84; основной сборник: PDF 86-88; старый вопросник: PDF 39-40

Объём ответа: Определить характеристический многочлен; доказать построение ФСР и общего решения через экспоненты, включая независимость по Вандермонду.

Доработка по фотографиям: вопрос 17

IMG_1990–IMG_1992; главы 19.

Что требуется. Определение многочлена; проверка экспонент; независимость и полнота.

Незавершённую проверку на IMG_1992 закрываем вычислением:

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0.$$

Это определитель Вандермонда после вынесения экспонент из столбцов. Каждая $e^{\lambda_j x}$ решает ЛОУ, поскольку $L(D)e^{\lambda_j x} = L(\lambda_j)e^{\lambda_j x} = 0$. Решений ровно n, значит это ФСР и их постоянные комбинации дают всё пространство решений.

Для вещественных коэффициентов комплексную пару $a \pm bi$, $b \neq 0$, заменяем вещественными функциями $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. У уравнения порядка n должно остаться n вещественных произвольных постоянных, а не по одной на комплексную пару.

Понять смысл

У экспоненты $e^{\lambda x}$ каждая производная отличается от самой функции лишь постоянным множителем: $D^k e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Поэтому в линейном уравнении с постоянными коэффициентами её подстановка превращает дифференцирование в алгебраическое вычисление многочлена. Корни этого многочлена указывают естественные режимы решения: рост, затухание или колебания.

Однако найти несколько подходящих экспонент недостаточно для общего решения. Надо доказать, что их число равно порядку уравнения и что они независимы. Именно второй пункт требует условия различных корней и определителя Вандермонда.

Определения и точная теорема

Рассмотрим

$$L(D)y := a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_n \neq 0,$$

где a_j являются постоянными, $D = \frac{d}{dx}$. **Характеристический многочлен** этого уравнения есть

$$L(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Равенство $L(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением. Многочлен и уравнение не одно и то же: первый является функцией аргумента λ, второе задаёт условие на его корни.

Теорема. Пусть L имеет n попарно различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Тогда функции

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

образуют комплексную ФСР на $\mathbb{R}$ и на любом непустом открытом интервале. Все комплексные решения имеют единственное представление

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}, \qquad C_j \in \mathbb{C}.$$

Если коэффициенты и корни вещественны, для всех вещественных решений достаточно взять $C_j \in \mathbb{R}$. При комплексных корнях вещественного многочлена ниже будет указан вещественный базис.

Доказательство: сначала решения, затем независимость

Для любого постоянного λ имеем

$$L(D)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = L(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Поскольку экспонента нигде не обращается в нуль, она решает уравнение тогда и только тогда, когда $L(\lambda) = 0$. Следовательно, каждая из n предложенных функций действительно является решением.

Вычислим их вронскиан:

$$W(x) = \det\left(\lambda_j^{i-1} e^{\lambda_j x}\right)_{i,j=1}^{n} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Определитель справа есть определитель Вандермонда:

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Все множители ненулевые по условию различных корней. Комплексная экспонента тоже нигде не равна нулю. Поэтому $W(x) \neq 0$, а предложенные решения независимы. Их ровно n, следовательно, они образуют ФСР. По общей теореме линейного уравнения порядка n их комбинации дают все решения, причём единственным образом.

Почему формула Вандермонда имеет такой вид. Если она не вспоминается, её можно восстановить индукцией. Рассмотрим определитель как многочлен по последнему аргументу λ_n. Его степень не превосходит $n-1$, а при $\lambda_n = \lambda_i$, $i < n$, два столбца совпадают. Значит, он делится на $\prod_{i<n}(\lambda_n - \lambda_i)$. Коэффициент при λ_n^{n-1} равен определителю Вандермонда от первых $n-1$ аргументов: он получается разложением по последнему столбцу и нижнему элементу. Поэтому

$$V_n = V_{n-1} \prod_{i<n} (\lambda_n - \lambda_i), \qquad V_1 = 1.$$

Повторение даёт заявленное произведение. Это также фиксирует знак: при столбцах в порядке $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ берётся $\lambda_j - \lambda_i$ для $i < j$.

Комплексные корни и вещественные решения

Если коэффициенты вещественны, невещественные корни идут сопряжёнными парами $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$. По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Вместо пары сопряжённых экспонент удобно взять вещественные решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Они являются вещественной и мнимой частями комплексного решения; вещественный оператор действует на эти части отдельно. Переход между двумя базисами задаётся постоянной невырожденной комплексной матрицей, поэтому независимость сохраняется. Для вещественного общего решения коэффициенты перед синусом и косинусом произвольны и вещественны.

Нулевой корень даёт $e^{0x} = 1$. При простом нулевом корне нельзя автоматически добавлять x: для этого нужен корень кратности хотя бы два. Равенство двух корней также не даёт две разные экспоненты; в этом случае нужен билет 20.

Разобранный пример с начальными данными

Решим

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Характеристический многочлен раскладывается группировкой:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$

Корни $2, i, -i$ различны. Вещественная ФСР есть $e^{2x}, \cos x, \sin x$, поэтому

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Дифференцируем и подставляем $x = 0$:

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 2C_1 + C_3 = 0, \qquad 4C_1 - C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{5}$, $C_2 = \frac{4}{5}$, $C_3 = -\frac{2}{5}$, и

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{2x} + \frac{4}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x.$$

Все три начальных условия проверяются непосредственно. Для проверки уравнения не нужно заново собирать длинную производную: $L(2) = 0$ подтверждает экспоненциальное слагаемое, а множитель $D^2 + 1$ уничтожает оба тригонометрических слагаемых. Коммутативность операторов с постоянными коэффициентами делает такую проверку корректной.

Практический алгоритм и контроль

Сначала проверить линейность, однородность и постоянство коэффициентов. Затем составить $L(\lambda)$, найти корни с кратностями, записать по одному независимому решению на каждый простой корень и преобразовать комплексные пары в вещественную форму. Число независимых постоянных должно равняться порядку. Начальные условия применяются только после составления полного общего решения.

Есть полезная проверка вронскиана: по Виету $\sum_j \lambda_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Найденная формула $W = Ve^{(\sum_j \lambda_j)x}$ согласуется с формулой Лиувилля, где в экспоненте стоит $-\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\,dx$. Несогласие обычно указывает на ошибку в знаке характеристического многочлена.

Ответ у доски

Записать оператор и характеристический многочлен, указать постоянство коэффициентов и условие $a_n \neq 0$. Сформулировать теорему для n различных корней. Доказать $L(D)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$. Затем выписать вронскиан, вынести экспоненты из столбцов и назвать ненулевое произведение Вандермонда. Заключение «это ФСР» связать с общим решением из билета 17. При вещественных коэффициентах объяснить замену сопряжённой пары синусом и косинусом.

Проверка себя

1. Решите $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **Ответ:** $y = e^{2x} - e^{x}$.
2. Найдите вещественную ФСР для $y'' + 4y' + 13y = 0$. **Ответ:** корни $-2 \pm 3i$, ФСР $e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x$.
3. Найдите $W[e^{x}, e^{3x}]$. **Ответ:** $2e^{4x}$.
4. Почему две копии e^{2x} не дают ФСР для $y'' - 4y' + 4y = 0$? **Ответ:** функции совпадают и зависимы; второй независимой функцией будет xe^{2x}, что требует теоремы о кратном корне.

Частые ошибки

Заменять производные степенями λ в уравнении с переменными коэффициентами и ожидать ту же теорию; терять свободный член многочлена; путать корень 0 с отсутствием решения; забывать вторую функцию для комплексной пары; доказывать только подстановку, но не независимость; использовать теорему простых корней при наличии кратностей.