**БИЛЕТ 18**

# Построение ЛОУ по ФСР. Вариация постоянных для ЛНУ

Источники: Лекции: PDF 76-78; основной сборник: PDF 80-85; старый вопросник: PDF 37

Объём ответа: Доказать построение уравнения по заданной ФСР; вывести систему вариации постоянных. Понижение порядка является дополнением.

## Доработка по фотографиям: вопрос 16

IMG_1988–IMG_1989; главы 18.

**Что требуется.** Вывести систему для производных коэффициентов и получить общее решение.

В тетради система записана без переходов. Для $n = 2$ положим $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ и наложим $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$. Тогда $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Ещё одно дифференцирование и подстановка в $y'' + py' + qy = f$ дают второе уравнение $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$.

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{W}, \quad W = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Для порядка $n$ первые $n - 1$ строк имеют правую часть нуль, последняя — нормированную $f$. Матрица этой системы является полной матрицей Вронского, поэтому обратима. После интегрирования получаем $n$ произвольных постоянных.

В пособии глава 18 также содержит восстановление уравнения по ФСР и понижение порядка. Эти дополнительные части на снимках данного вопроса не заявлены; сам метод вариации остаётся обязательной частью рукописного №16.

## Понять смысл

Обычно по уравнению ищут решения. Здесь сначала решается обратная задача: даны $n$ функций, и нужно построить уравнение порядка $n$, для которого они составят ФСР. Простая независимость функций недостаточна: для уравнения с непрерывными нормированными коэффициентами их вронскиан должен быть ненулевым в каждой точке выбранного интервала.

Вторая часть билета использует уже известную ФСР, чтобы решить неоднородное уравнение. Вместо постоянных коэффициентов в общем однородном решении вводят функции. Возникающие дополнительные условия не являются произвольным трюком: это координатная запись матричного уравнения $Xc' = g$ из предыдущего билета.

## Теорема о построении уравнения

**Теорема.** Пусть $y_1, \dots, y_n \in C^n(I)$, где $I$ есть интервал, и

$$W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0 \qquad \text{для каждого } x \in I.$$

Тогда существует единственное нормированное линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами на $I$, для которого данные функции образуют ФСР. Его можно записать определителем

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Все функции в одной строке вычисляются при одном и том же $x$.

Уникальность относится именно к нормированной форме. Если умножить всё уравнение на любую нигде не нулевую непрерывную функцию, множество решений не изменится, но буквальные коэффициенты будут другими.

## Полное доказательство

Разложим определитель по последнему столбцу. Коэффициент при $y^{(n)}$ равен $W(x)$: его алгебраическое дополнение имеет положительный знак $(-1)^{2n+2} = 1$. Получаем

$$W(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_0(x)y = 0.$$

Коэффициенты $b_j$ являются определителями из непрерывных производных данных функций до порядка $n$, поэтому непрерывны. По условию $W$ нигде не равен нулю, значит, можно разделить на $W$. Полученные $a_j = \frac{b_j}{W}$ непрерывны на $I$.

При подстановке $y = y_k$ последний столбец совпадает с $k$-м; определитель равен нулю. Следовательно, каждая из $n$ функций является решением построенного уравнения. Ненулевой вронскиан обеспечивает их независимость. Итак, они действительно составляют ФСР, а по теореме об общем решении все решения имеют вид $\sum_j C_j y_j$.

Осталось доказать уникальность нормированных коэффициентов. Для каждого $x$ они должны удовлетворять $n$ равенствам

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r(x) y_j^{(r)}(x) = -y_j^{(n)}(x), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Матрица этой алгебраической системы есть транспонированная матрица Вронского, поэтому её определитель равен $W(x) \neq 0$. Значит, набор $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ единственен в каждой точке. Это завершает все части доказательства.

## Пример обратной задачи и роль интервала

Построим уравнение с ФСР $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ на $I = (0, \infty)$. Имеем $W = x^2 \neq 0$. Определитель даёт

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

После нормировки

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0, \qquad x > 0.$$

Подстановка $x$ и $x^2$ подтверждает результат. Формула Лиувилля тоже согласуется с ним: $-a_1 = \frac{2}{x}$, поэтому $W$ пропорционален $x^2$.

На всей $\mathbb{R}$ эти функции независимы, но их вронскиан обращается в нуль. Поэтому они не могут быть ФСР нормированного уравнения второго порядка с непрерывными на всей прямой коэффициентами. Ненормированная запись $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ формально существует и при $x = 0$, однако её старший коэффициент там исчезает. Это не противоречит теореме и не позволяет незаметно расширить интервал регулярной задачи.

## Вариация постоянных: постановка и вывод

Пусть $a_0, \dots, a_{n-1}, f \in C(I)$, а $y_1, \dots, y_n$ есть ФСР соответствующего ЛОУ. Ищем решение ЛНУ в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x).$$

Для $n > 1$ наложим условия

$$\sum_j c_j' y_j = 0, \quad \sum_j c_j' y_j' = 0, \quad \dots, \quad \sum_j c_j' y_j^{(n-2)} = 0.$$

Первое позволяет записать $y' = \sum_j c_j y_j'$ без лишнего слагаемого. Второе затем даёт $y'' = \sum_j c_j y_j''$. Продолжая, получаем

$$y^{(r)} = \sum_j c_j y_j^{(r)}, \quad 0 \le r \le n-1, \qquad y^{(n)} = \sum_j c_j y_j^{(n)} + \sum_j c_j' y_j^{(n-1)}.$$

При подстановке в ЛНУ выражения с $c_j$ сокращаются, поскольку $L[y_j] = 0$. Остаётся последнее необходимое условие $\sum_j c_j' y_j^{(n-1)} = f$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы равен ненулевому вронскиану, поэтому система однозначно определяет непрерывные $c_j'$. Их интегралы определяют $c_j$ с $n$ произвольными постоянными. Для одного частного решения можно выбрать любые удобные первообразные; общее решение получается прибавлением общего однородного.

При $n = 1$ предварительных нулевых условий нет: сразу получается $c_1' y_1 = f$. Если исходное уравнение не нормировано, последняя правая часть равна $\frac{f}{b_n}$. Забытый старший коэффициент меняет ответ.

Почему искусственные на вид нулевые условия не теряют решения? В сопутствующей системе столбцы $X$ являются векторами производных $y_j$. Равенство $Xc' = g$, где $g = (0, \dots, 0, f)^{\mathsf{T}}$, совпадает с выписанной системой. А матричный метод, как доказано в билете 16, представляет каждое решение. Значит, это согласованный способ выбрать меняющиеся координаты состояния.

## Разобранное неоднородное уравнение

Решим $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ на $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Для однородного уравнения ФСР есть $\cos x, \sin x$, вронскиан равен единице. Вариация даёт

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Умножая на обратную матрицу вращения, находим $c_1' = -\tan x$, $c_2' = 1$. На выбранном интервале $\cos x > 0$, поэтому можно взять

$$c_1 = \ln(\cos x), \qquad c_2 = x.$$

Получаем

$$y_p = \cos x \ln(\cos x) + x \sin x, \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p.$$

Проверим частное решение:

$$y_p' = -\sin x \ln(\cos x) + x \cos x,$$

$$y_p'' = -\cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x - x \sin x.$$

После сложения с $y_p$ остаётся $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$. Проверка одновременно выявляет, почему границы интервала нельзя включить: исходная правая часть там не определена.

## Дополнение: понижение порядка по известному решению

Если известно ненулевое на выбранном подынтервале решение $y_1$ ЛОУ второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, положим $y = y_1 z$. После подстановки слагаемые с $z$ исчезнут, поскольку $L[y_1] = 0$:

$$y_1 z'' + (2y_1' + p y_1) z' = 0.$$

Обозначение $v = z'$ снижает порядок до первого. Отсюда

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

даёт второе независимое решение при согласованном выборе первообразных. Деление на $y_1$ законно лишь там, где $y_1 \neq 0$. Этот дополнительный метод не заменяет обязательные доказательства билета.

## Ответ у доски

Для обратной задачи назвать $C^n$-гладкость и ненулевой вронскиан на всём интервале, записать расширенный определитель, разложить по последнему столбцу и проверить решения совпадающими столбцами. Уникальность объяснить системой для коэффициентов. Для вариации выписать $n-1$ нулевых условий, последнее равенство с $f$ и доказать их совместимость ненулевым определителем.

## Проверка себя

1. Постройте нормированное ЛОУ с ФСР $1, e^{2x}$. **Ответ:** $y'' - 2y' = 0$.
2. Найдите частное решение $y'' = x$ вариацией по ФСР $1, x$. **Ответ:** $c_1' + xc_2' = 0$, $c_2' = x$, откуда $c_1 = -\frac{x^3}{3}$, $c_2 = \frac{x^2}{2}$ и $y_p = \frac{x^3}{6}$.
3. Для $2y'' + 2y = \cos x$ что стоит справа в последнем условии вариации? **Ответ:** $\frac{\cos x}{2}$ после нормировки.
4. Почему $x, x^2$ нельзя объявить ФСР регулярного ЛОУ второго порядка на всей прямой? **Ответ:** $W = x^2$ имеет нуль; нормированные восстановленные коэффициенты имеют особенность при $0$.

## Частые ошибки

Требовать только независимость вместо ненулевого вронскиана на всём интервале; забывать деление определителя на старший коэффициент; путать условия на $c_j$ с условиями на $c_j'$; вводить лишь последнее уравнение без нулевых условий; терять интервал при логарифмировании или делении; выдавать найденные $c_j$ за само решение.