БИЛЕТ 17

Линейное уравнение высшего порядка: система, ФСР и вронскиан

Источники: Лекции: PDF 71-76; основной сборник: PDF 74-79; старый вопросник: PDF 33-36

Объём ответа: Доказать эквивалентность перехода, сохранение зависимости, теорему об общем решении и скалярную формулу Лиувилля-Остроградского.

Доработка по фотографиям: вопрос 15

IMG_1983–IMG_1987; главы 17.

Что требуется. Переход, сохранение зависимости, общее решение, скалярный Вронскиан и формула Лиувилля.

Для нормированного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f$ матрица сопровождающей системы имеет единицы над диагональю и последнюю строку $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$. Её след равен $-a_{n-1}$, поэтому

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Если старший коэффициент $a_n \neq 1$, сначала делим все коэффициенты и f на a_n; в экспоненте оказывается $-\int a_{n-1}/a_n$.

Отображение $y \mapsto (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$ сохраняет зависимости: тождественную скалярную комбинацию дифференцируем, а из векторной комбинации берём первую координату. Специальная альтернатива для Вронскиана относится к полному набору из n решений уравнения порядка n. Для меньшего числа функций нельзя без оговорки использовать укороченный определитель как полный Вронскиан системы.

Понять смысл и зафиксировать область

Линейное уравнение порядка n можно рассматривать как систему первого порядка для состояния, состоящего из функции и её производных. При таком переходе не теряются ни решения, ни начальные данные, ни линейная зависимость. Поэтому почти вся теория линейных систем переносится на скалярное уравнение. Однако вронскиан скалярных функций выглядит иначе: его строки составлены из последовательных производных.

Рассмотрим нормированное уравнение

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

где все a_j и f непрерывны на интервале I. При $f \equiv 0$ это ЛОУ, при $f \not\equiv 0$ это ЛНУ. Если дано уравнение со старшим коэффициентом $b_n(x)$, сначала надо выбрать интервал, на котором $b_n \neq 0$, и разделить на него. Вся последующая теория относится к полученным нормированным коэффициентам.

Переход к системе и его обратимость

Полагаем $t = x$ и

$$u = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^{\mathsf{T}}.$$

Тогда

$$u' = A(t)u + g(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Для $n = 1$ это просто $u' = -a_0 u + f$. В общем случае первые $n - 1$ строк кодируют определение производных, последняя строка совпадает с исходным уравнением.

Если y решает скалярное уравнение, его вектор производных удовлетворяет системе. Обратно, если u решает систему, то первые строки дают $u_2 = u_1'$, $u_3 = u_1''$, последовательно $u_j = u_1^{(j-1)}$. Последняя строка показывает, что $y = u_1$ имеет непрерывную n-ю производную и решает исходное уравнение. Так установлено взаимно однозначное соответствие решений. Начальные данные $y^{(j)}(x_0) = \alpha_j$ переходят в $u(t_0) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})^{\mathsf{T}}$.

По глобальной линейной теореме каждая задача Коши имеет единственное решение на всём I. Здесь это верно даже для переменных непрерывных коэффициентов; их производные не требуются.

Сохранение линейной зависимости: доказательство

Пусть $y_1, \dots, y_k \in C^{n-1}(I)$, и каждому y_j сопоставлен столбец

$$u^j = (y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})^{\mathsf{T}}.$$

Тогда $y_1, \dots, y_k$ зависимы на I тогда и только тогда, когда $u^1, \dots, u^k$ зависимы на I.

Действительно, если $\sum_j c_j y_j \equiv 0$ с постоянными коэффициентами, дифференцируем это тождество $r = 1, \dots, n-1$ раз. Получаем $\sum_j c_j y_j^{(r)} \equiv 0$. Собирая все эти равенства в один вектор, имеем $\sum_j c_j u^j \equiv 0$ с тем же ненулевым набором коэффициентов. Обратно, первая координата векторного тождества $\sum_j c_j u^j \equiv 0$ есть $\sum_j c_j y_j \equiv 0$. Это уже требуемая зависимость скалярных функций.

Для данного утверждения само дифференциальное уравнение не нужно: достаточно указанной гладкости. Принадлежность одному ЛОУ понадобится для усиленных выводов о вронскиане и полноте ФСР.

ФСР и теорема об общем решении

ФСР линейного однородного уравнения порядка n называется набор из n его линейно независимых решений на I. Такие наборы существуют: берём ФСР сопутствующей системы и первые координаты её столбцов. Обратимость перехода и сохранение зависимости дают нужные n независимых скалярных решений.

Теорема. Если $y_1, \dots, y_n$ образуют ФСР уравнения $L[y] = 0$, то все его решения и только они имеют вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \qquad C_j \in \mathbb{R},$$

причём коэффициенты каждого решения определены однозначно.

Доказательство. Линейность L сразу даёт $L[\sum_j C_j y_j] = \sum_j C_j L[y_j] = 0$. Для обратного включения возьмём произвольное решение y и его вектор производных u. Векторы производных $u^1, \dots, u^n$ выбранной ФСР решают сопутствующую ЛОС и независимы, следовательно, образуют её ФСР. По теореме об общем решении системы $u = \sum_j C_j u^j$ с единственными константами. Первая координата даёт $y = \sum_j C_j y_j$. Единственность также следует прямо из независимости скалярной ФСР. Доказано.

Практически постоянные определяют по начальным данным: нужно решить систему из n линейных алгебраических уравнений, полученных подстановкой x_0 в $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Её определитель и есть следующий объект.

Скалярный вронскиан и границы его применения

Для k функций $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(I)$ определим

$$W[y_1, \dots, y_k](x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ y_1' & \cdots & y_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Зависимость функций влечёт $W \equiv 0$: дифференцируем тождество зависимости до порядка $k-1$ и получаем одну нетривиальную линейную связь между столбцами. Поэтому $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке достаточно для независимости.

Обратное для произвольных функций неверно. Например, $y_1 = x^2$, $y_2 = x|x|$ принадлежат $C^1(\mathbb{R})$, их вронскиан равен нулю всюду, но они независимы: на положительной полуоси потребовалось бы $c_1 + c_2 = 0$, а на отрицательной $c_1 - c_2 = 0$. Вместе эти равенства дают только нулевые коэффициенты.

Усиление для ЛОУ. Если взяты ровно n решений одного нормированного ЛОУ порядка n с непрерывными коэффициентами на I, то $W(x_0) = 0$ в одной точке равносильно зависимости этих решений на всём I. Их столбцы производных решают одну n-мерную ЛОС; её системный вронскиан совпадает с данным скалярным. Поэтому утверждение доказано леммой билета 13.

Ограничение «ровно n» нельзя вычеркнуть. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ являются независимыми решениями $y''' = 0$, но их вронскиан размера 2×2 равен x^2 и обращается в нуль при 0. Они не образуют полный набор из трёх функций. Именно это различие явно подчёркнуто в лекции на PDF-странице 75; чрезмерно широкую формулировку из сборника использовать не следует.

Формула Лиувилля-Остроградского и доказательство

Пусть $y_1, \dots, y_n$ есть n решений $L[y] = 0$, $x_0 \in I$. Тогда

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x), \qquad W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Минус связан с тем, что последняя диагональная компонента сопутствующей матрицы равна $-a_{n-1}$; остальные диагональные компоненты равны нулю. Применение системной формулы уже даёт доказательство.

Полезно также прямое доказательство, полностью объясняющее знак. Дифференцируем определитель по строкам. При дифференцировании любой строки, кроме последней, возникает строка, уже присутствующая ниже; такой определитель равен нулю. Остаётся определитель с последней строкой $(y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$. По уравнению эта строка равна сумме строк с коэффициентами $-a_0, \dots, -a_{n-1}$. В силу линейности определителя все слагаемые с повторяющимися строками исчезают. Остаётся только $-a_{n-1}W$. Для $n = 1$ то же равенство непосредственно совпадает с самим уравнением. Применяем интегрирующий множитель $\exp(\int_{x_0}^{x} a_{n-1})$ и получаем формулу, не деля на W.

Если исходное уравнение записано как $b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots = 0$, в экспоненте стоит отношение $-\frac{b_{n-1}}{b_n}$, а не просто $-b_{n-1}$.

Разобранный пример

Для $y''' - y' = 0$ проверим функции $1, e^x, e^{-x}$. Подстановка каждой даёт нуль. Их вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, это ФСР, и $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. При $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ получаем

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_2 - C_3 = 1, \quad C_2 + C_3 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$ и $y = \sinh x$. Формула Лиувилля подтверждает постоянство W: коэффициент при y'' равен нулю.

Ответ у доски

Разделить ответ на четыре части: переход к системе в обе стороны; сохранение зависимости посредством дифференцирования тождества; общий вид решения через ФСР; вронскиан и формула Лиувилля. В каждом использовании критерия нулевого вронскиана сказать «n решений уравнения порядка n». Минус в экспоненте объяснить последней строкой сопутствующей матрицы или прямым дифференцированием определителя.

Проверка себя

1. Для $y'' + 2xy' + y = 0$ известно $W(0) = 3$. Найдите W. **Ответ:** $3e^{-x^2}$.

2. У двух решений $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ одинаковые значения в x_0. Совпадают ли решения? **Ответ:** не обязательно; нужны также одинаковые первые производные.
3. Может ли нетривиальное решение ЛОУ порядка n иметь в одной точке нулевые $y, y', \dots, y^{(n-1)}$? **Ответ:** нет, по единственности оно было бы нулевым на всём I.
4. Верно ли, что любые две функции из ФСР уравнения третьего порядка имеют ненулевой вронскиан 2×2 всюду? **Ответ:** нет; в ФСР $1, x, x^2$ можно взять x, x^2, чей вронскиан равен x^2.

Частые ошибки

Пропускать обратный переход от системы к функции; использовать переменные коэффициенты в тождестве линейной зависимости; забывать старший коэффициент при нормировке; писать плюс в скалярной формуле Лиувилля; переносить критерий для n решений на произвольное меньшее число функций; считать совпадение только значений достаточным для единственности уравнения высшего порядка.