БИЛЕТ 16

Структура общего решения ЛНС. Вариация постоянных

Источники: Лекции: PDF 67-70; основной сборник: PDF 70-73; старый вопросник: PDF 32

Объём ответа: Доказать связь общего решения ЛНС и ЛОС; вывести и объяснить метод вариации постоянных.

Доработка по фотографиям: вопрос 14

IMG_1980–IMG_1982; главы 16.

Что требуется. Доказать структуру общего решения; вывести вариацию постоянных для системы.

Фиксируем одно частное решение u_p уравнения $u' = A(t)u + f(t)$. Разность любого решения u и u_p удовлетворяет $z' = Az$, а сумма $u_p + z$ вновь решает ЛНС. Это обе стороны утверждения $u = u_p + u_h$.

Положим $u = X(t)c(t)$, $X' = AX$. Тогда

$$X'c + Xc' = AXc + f, \qquad Xc' = f, \qquad c' = X^{-1}f.$$

Интегрируем с фиксированным нижним пределом:

$$u(t) = X(t)\left[c_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds\right], \quad c_0 = X(t_0)^{-1}u_0.$$

Обратная матрица стоит слева от вектора f. В записи с неопределённым интегралом константа — постоянный вектор; нельзя дважды учитывать её и в интеграле, и ещё одним независимым набором.

Понять смысл

У однородной системы нет внешнего воздействия: $u' = Au$. Неоднородная система $u' = Au + f$ содержит заданную добавку $f(t)$. Если два движения испытывают одну и ту же добавку, то при вычитании она исчезает. Поэтому разность любых двух решений ЛНС подчиняется однородной системе.

Отсюда возникает простая конструкция: достаточно найти одно частное решение u_p неоднородной системы. Все остальные получаются прибавлением к нему произвольного решения однородной. Слово «частное» означает здесь один фиксированный представитель; не обязательно решение с определёнными начальными данными.

Точная теорема и доказательство

Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$, а u_p есть некоторое решение $u' = Au + f$ на I. Тогда все решения ЛНС и только они имеют вид

$$u(t) = u_p(t) + v(t), \qquad v' = A(t)v.$$

Если X есть фундаментальная матрица соответствующей ЛОС, то общее решение ЛНС записывается как

$$u(t) = u_p(t) + X(t)C, \qquad C \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство в прямую сторону. Для любого однородного решения v дифференцирование даёт

$$(u_p + v)' = u_p' + v' = Au_p + f + Av = A(u_p + v) + f.$$

Следовательно, указанная сумма является решением ЛНС.

Доказательство полноты. Пусть u есть произвольное решение ЛНС. Тогда

$$(u - u_p)' = (Au + f) - (Au_p + f) = A(u - u_p).$$

Значит, $v = u - u_p$ есть решение ЛОС. По теореме билета 14 существует единственный постоянный вектор C такой, что $v = XC$. Поэтому других решений, не описанных формулой, нет. Доказательство завершено.

Множество решений ЛНС является сдвигом линейного пространства решений ЛОС, то есть аффинным множеством. В общем случае оно само не является линейным пространством: нулевая функция не решает систему с $f \not\equiv 0$, а сумма двух решений имеет свободный член $2f$, а не f.

Полезное уточнение: если u^1, u^2 решают одну ЛНС, то $\alpha u^1 + \beta u^2$ решает ту же ЛНС при $\alpha + \beta = 1$. Если же u^1 решает систему с воздействием f_1, а u^2 с воздействием f_2, их сумма решает систему с воздействием $f_1 + f_2$. Во всех этих утверждениях матрица A должна быть одной и той же.

Вывод метода вариации постоянных

В однородном случае $u = XC$ с постоянным вектором C. Для неоднородного случая разрешим коэффициентам меняться:

$$u(t) = X(t)c(t).$$

Это не догадка, ограничивающая класс решений: $X(t)$ обратима, поэтому для любой функции u можно определить $c = X^{-1}u$. Если u дифференцируема, то и c дифференцируема.

Дифференцируем произведение и используем $X' = AX$:

$$u' = X'c + Xc' = AXc + Xc'.$$

С другой стороны, исходное уравнение требует $u' = AXc + f$. После сокращения общего слагаемого получаем

$$X(t)c'(t) = f(t), \qquad c'(t) = X(t)^{-1}f(t).$$

Итак, задача дифференциальной связи компонент превратилась в покомпонентное интегрирование известного вектора. При фиксированном $t_0 \in I$

$$c(t) = C + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds,$$

и потому

$$u(t) = X(t) \left(C + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds \right).$$

Обратная матрица стоит внутри интеграла и вычисляется в переменной s. Выносить её из интеграла как постоянную матрицу нельзя.

При начальном условии $u(t_0) = u^0$ имеем $C = X(t_0)^{-1} u^0$. Поэтому

$$u(t) = X(t) X(t_0)^{-1} u^0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds.$$

Первое слагаемое переносит начальное состояние, второе учитывает воздействие. У второго слагаемого нулевое начальное значение, поскольку интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

Алгоритм решения задачи

1. Решить соответствующую ЛОС и собрать фундаментальную матрицу X по столбцам. Проверить $X' = AX$ и $\det X \neq 0$.
2. Решить алгебраическую систему $Xc' = f$. Обратную матрицу не обязательно выписывать полностью: иногда проще исключить неизвестные или использовать правило Крамера.
3. Проинтегрировать найденные компоненты c', затем собрать исходный вектор $u = Xc$.
4. Учесть начальные условия, если они заданы, и проверить результат в исходной системе.

Вычислить только c_1, c_2 недостаточно: это коэффициенты в движущемся базисе, а не искомые компоненты состояния. Финальная сборка $u = Xc$ является обязательным последним шагом.

Разобранный пример

Решим

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = 0.$$

Для однородной системы подходит матрица вращения

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Она нормирована в нуле. Тогда

$$c' = X^{-1} f = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix},$$

где $c(0) = 0$ следует из начальных данных. Собираем:

$$u(t) = X(t)c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Проверка: $u_1' = \cos t = -u_2 + 1$, $u_2' = \sin t = u_1$, а $u(0) = 0$. Если нужна вся совокупность решений, добавим $X(t)C$:

$$\begin{cases} u_1 = C_1 \cos t - C_2 \sin t + \sin t, \\ u_2 = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 1 - \cos t. \end{cases}$$

Есть и другое частное решение, $\tilde{u}_p = (0, 1)^\mathsf{T}$. Оно тоже подходит: $A\tilde{u}_p + f = 0$. Его отличие от найденного частного решения есть однородное решение. Следовательно, разные корректные частные решения приводят к одному общему семейству после переобозначения постоянных.

Ответ у доски

Начать с двух вычислений: сумма частного и однородного решения удовлетворяет ЛНС, разность произвольного и частного решений удовлетворяет ЛОС. Затем ввести $u = Xc(t)$, полностью продифференцировать произведение, сократить AXc и получить $Xc' = f$. Записать интегральную формулу и пояснить роль начального вектора. Отдельно подчеркнуть, что матрица X берётся от однородной системы.

Проверка себя

1. Если u_p и $\tilde{u}_p$ есть частные решения одной ЛНС, чему удовлетворяет $u_p - \tilde{u}_p$? **Ответ:** соответствующей ЛОС.
2. Решите $u_1' = u_1 + e^t$, $u_2' = -u_2$, $u(0) = 0$. **Ответ:** $u = (te^t, 0)^\mathsf{T}$.
3. Зависит ли общее семейство от нижнего предела интеграла? **Ответ:** нет; смена фиксированного нижнего предела добавляет постоянный вектор внутри скобок, который включается в C.
4. Можно ли использовать матрицу из двух зависимых решений ЛОС? **Ответ:** нет; она вырождена и не позволяет однозначно решить $Xc' = f$ или представить произвольное состояние.

Частые ошибки

Забывать $X'c$ при дифференцировании; путать $X^{-1}f$ и fX^{-1}; искать фундаментальную матрицу из решений ЛНС; считать сумму двух неоднородных решений решением той же задачи; интегрировать c' и забывать вернуться к u; не подставлять начальные данные после сборки.