БИЛЕТ 15

Производная определителя и формула Лиувилля-Остроградского

Источники: Лекции: PDF 64-67; основной сборник: PDF 66-69; старый вопросник: PDF 30-31

Объём ответа: Обе формулы сформулировать для общего n; обе доказать при $n = 2$.

Доработка по фотографиям: вопрос 13

IMG_1977–IMG_1979; главы 15.

Что требуется. Общая формула производной определителя; доказательство при n=2; формула Лиувилля при n=2.

Для $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ имеем $W = uz - vw$ и

$$W' = u'z + uz' - v'w - vw'.$$

Если $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, подставляем $u' = au + bw$, $v' = av + bz$, $w' = cu + dw$, $z' = cv + dz$. После раскрытия взаимно уничтожаются члены с b, c, остаётся $W' = (a + d)W$.

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Не делим на W в доказательстве, пока не разобран нулевой случай. Уравнение $W' = \operatorname{tr} A \, W$ линейно, и его формула верна также при $W(t_0) = 0$. Следовательно, определитель либо нигде не нулевой, либо тождественно нулевой.

Понять смысл

Фундаментальная матрица переносит начальные состояния вдоль решений. Её определитель измеряет, во сколько раз меняется ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на эти состояния. Поразительный факт состоит в том, что для этого определителя получается одно скалярное уравнение: скорость изменения объёма зависит только от суммы диагональных коэффициентов системы.

Поэтому вронскиан нередко можно найти, вообще не решая исходную систему. Если известен след матрицы и одно значение определителя, формула Лиувилля-Остроградского даёт все остальные значения. Она также ещё раз объясняет альтернативу: определитель либо всегда нулевой, либо никогда не обращается в нуль.

Формула дифференцирования определителя

Пусть $B(t)$ есть квадратная матрица размера n, все её элементы дифференцируемы на интервале I. Обозначим её строки через $r_1(t), \dots, r_n(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\det B(t) = \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_k'(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}.$$

В каждом слагаемом дифференцируется ровно одна строка, остальные остаются прежними. Столь же верна формула с заменой одного столбца на его производную. Невырожденность B не нужна.

Полное доказательство при $n = 2$. Для $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеем $\det B = ad - bc$. По правилу производной произведения

$$(\det B)' = a'd + ad' - b'c - bc' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

Это и есть формула по строкам. Перегруппировав те же четыре слагаемых иначе, получим формулу по столбцам:

$$(\det B)' = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}.$$

Общий случай следует из формулы определителя как суммы произведений и правила дифференцирования произведения, но его развёрнутое доказательство не входит в указанное требование билета.

Особенно важно не перепутать результат с $\det B'$. Например, для $B(t) = \operatorname{diag}(t, t)$ получаем $(\det B)' = 2t$, тогда как $\det B' = 1$. Производная определителя и определитель матрицы производных являются разными операциями.

Точная формула Лиувилля-Остроградского

Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, а $u^1, \dots, u^n$ являются любыми n решениями системы $u' = A(t)u$ на I. Обозначим

$$X = (u^1 \ \cdots \ u^n), \qquad W = \det X, \qquad \operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Тогда для каждого $t_0 \in I$ и всех $t \in I$

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t)\, W(t), \qquad W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Не требуется, чтобы решения образовывали ФСР: зависимый набор, для которого $W \equiv 0$, тоже включён. Не требуется и дифференцируемость A: непрерывность коэффициентов уже обеспечивает нужную дифференцируемость решений.

Полное доказательство при $n = 2$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и

$$u^1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad u^2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \qquad W = ps - rq.$$

Из уравнений для обоих столбцов следует

$$p' = ap + bq, \quad q' = cp + dq, \quad r' = ar + bs, \quad s' = cr + ds.$$

Дифференцируем W и подставляем все четыре равенства:

$$\begin{aligned} W' &= p's + ps' - r'q - rq' \\ &= (ap + bq)s + p(cr + ds) - (ar + bs)q - r(cp + dq) \\ &= aps + bqs + cpr + dps - arq - bsq - crp - drq \\ &= (a + d)(ps - rq) = (\operatorname{tr} A)W. \end{aligned}$$

Смешанные слагаемые взаимно уничтожились. Именно поэтому в итоговом уравнении осталась сумма диагональных элементов.

Теперь положим $T(t) = \int_{t_0}^{t} (a(s) + d(s))\, ds$. Так как $T' = a + d$,

$$(e^{-T(t)}W(t))' = e^{-T(t)}(W'(t) - (a + d)W(t)) = 0.$$

Значит, $e^{-T(t)}W(t)$ постоянно на интервале и равно своему значению при t_0, то есть $W(t_0)$. Умножая на $e^{T(t)}$, получаем требуемую формулу.

Этот способ не делит на W и сразу охватывает нулевой вронскиан. В лекционной записи сначала разбираются случаи $W(t_0) = 0$ и $W(t_0) \neq 0$, а для второго интегрируется $(\ln |W|)'$. Оба пути верны. Если выбран логарифмический путь, перед делением надо сослаться на альтернативу вронскиана и в конце восстановить его знак по начальному значению.

Что из формулы следует

Экспонента вещественного интеграла положительна. Поэтому $W(t_0) = 0$ влечёт $W \equiv 0$, а $W(t_0) \neq 0$ влечёт сохранение ненулевого значения и знака на всём I. При $\operatorname{tr} A \equiv 0$ любой вронскиан постоянен. Это не означает, что каждое решение постоянно: может меняться форма параллелепипеда при неизменном объёме.

Для фундаментальной матрицы можно также восстановить след:

$$\operatorname{tr} A(t) = \frac{W'(t)}{W(t)}.$$

Но это лишь одна скалярная характеристика матрицы; по ней нельзя восстановить все коэффициенты системы. Равенство $W' = 0$ не означает $A = 0$.

Разобранный пример

Пусть X есть матрица решений системы с

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ e^t & 2 - t \end{pmatrix}, \qquad \det X(1) = -3.$$

Найти столбцы X явно непросто, но след равен 2. Следовательно,

$$\det X(t) = -3 \exp\left(\int_1^t 2\, ds \right) = -3e^{2(t-1)}.$$

Определитель нигде не равен нулю; поэтому столбцы образуют ФСР на $\mathbb{R}$. Знак всегда отрицателен. При $t = 1$ формула возвращает -3, а производная $W' = 2W$ даёт независимую проверку.

Для системы вращения $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\operatorname{tr} A = 0$. Её нормированная фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1. Столбцы поворачиваются, хотя определитель не изменяется. Так геометрический смысл формулы виден без вычисления интеграла.

Ответ у доски

Сформулировать правило замены одной строки на производную и доказать его раскрытием определителя 2×2. Затем записать общую формулу Лиувилля-Остроградского, указав непрерывность A и принадлежность столбцов одной ЛОС. В доказательстве при $n = 2$ явно получить $W' = (a + d)W$, после чего применить интегрирующий множитель. В конце отметить, что случай $W = 0$ не потерян.

Проверка себя

1. Если $\operatorname{tr} A(t) = 2t$ и $W(0) = 5$, чему равен $W(t)$? **Ответ:** $5e^{t^2}$.
2. Может ли вронскиан одной ЛОС с непрерывными коэффициентами равняться $\sin t$ на $(-1, 1)$? **Ответ:** нет; он имеет нуль и одновременно ненулевые значения.
3. Если $W(t) = 7e^{-3t}$, какой след у матрицы системы? **Ответ:** -3; отдельные элементы матрицы не определены.
4. Для $B(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$ найдите $(\det B)'$. **Ответ:** $e^t + te^t - 2t$, что также получается суммой двух определителей с производными строк.

Частые ошибки

Дифференцировать все строки одновременно в одном определителе; подставлять в экспоненту $\det A$ вместо $\operatorname{tr} A$; забывать множитель $W(t_0)$; терять знак при логарифмировании; делить на нулевой вронскиан; применять формулу к столбцам, которые не являются решениями одной однородной системы.