БИЛЕТ 14

Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица ЛОС

Источники: Лекции: PDF 60-63; основной сборник: PDF 60-65; старый вопросник: PDF 28-29

Объём ответа: Определения; полное доказательство теоремы об общем решении; формулировка перехода между фундаментальными матрицами.

Доработка по фотографиям: вопрос 12

IMG_1975–IMG_1976; главы 14.

Что требуется. Теорема об общем решении; размерность; переход между фундаментальными матрицами.

Для системы размера n ФСР содержит ровно n независимых векторных решений. Если $X(t)$ составлена из них по столбцам, $\det X(t) \neq 0$ во всех точках интервала. Для любого решения u сначала решаем обычную систему $X(t_0)c = u(t_0)$. Единственность даёт $u(t) = X(t)c$ на всём интервале: коэффициенты постоянны.

Если Y — другая фундаментальная матрица, каждый её столбец есть постоянная комбинация столбцов X, поэтому $Y = XC$ с постоянной невырожденной C. Обратно, такое произведение даёт фундаментальную матрицу. При заданных X, Y матрица перехода единственна: $C = X(t_0)^{-1}Y(t_0)$.

Нормированная матрица $\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$ имеет $\Phi(t_0, t_0) = E$. Умножение справа и порядок множителей обязательны; $X(t_0)^{-1}X(t)$ в общем случае задаёт другую матрицу.

Понять смысл

Для линейной однородной системы отдельные решения складываются, а их постоянные кратные остаются решениями. Поэтому множество решений похоже на пространство векторов. Отличие лишь в том, что его элементы являются функциями. Фундаментальная система играет роль базиса: найдя n подходящих решений, мы получаем все остальные одной линейной комбинацией.

Почему достаточно ровно n решений? Начальное состояние принадлежит $\mathbb{R}^n$. Если выбранные решения в момент t_0 образуют базис этого пространства, то их комбинацией можно получить любое начальное состояние. Единственность задачи Коши затем заставляет полученную комбинацию совпасть с нужным решением во все остальные моменты.

Определения и точная теорема

Весь билет рассматривает систему

$$u' = A(t)u, \qquad A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n}),$$

на одном интервале I. **Фундаментальная система решений**, или ФСР, есть набор из n линейно независимых решений $u^1, \dots, u^n$ на I. По билету 13 их значения образуют базис $\mathbb{R}^n$ в каждый момент времени.

Фундаментальная матрица есть матрица из этих столбцов:

$$X(t) = (u^1(t) \ \cdots \ u^n(t)).$$

Эквивалентные условия: $X \in C^1$, $X' = AX$ и $\det X(t) \neq 0$ на I. Для проверки достаточно уравнения $X' = AX$ и невырожденности в одной точке: затем работает альтернатива вронскиана.

Теорема об общем решении. Если $u^1, \dots, u^n$ образуют ФСР, то множество всех решений системы на I имеет вид

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u^j(t) = X(t)C, \qquad C \in \mathbb{R}^n.$$

Для каждого решения вектор постоянных C единственен. В частности, решение задачи Коши $u(t_0) = u^0$ равно

$$u(t) = X(t)X(t_0)^{-1}u^0.$$

Полное доказательство общего решения

Шаг 1. Любая указанная комбинация является решением. При постоянном C имеем $(XC)' = X'C = AXC$. В покомпонентной форме это обычная линейность дифференцирования. Если вместо C взять произвольную функцию $C(t)$, появится дополнительное слагаемое XC', поэтому постоянство здесь существенно.

Шаг 2. Любое решение представимо указанным способом. Пусть $v(t)$ есть произвольное решение, $t_0 \in I$. Так как $X(t_0)$ невырождена, алгебраическая система

$$X(t_0)C = v(t_0)$$

имеет единственное числовое решение $C = X(t_0)^{-1}v(t_0)$. Рассмотрим $w(t) = X(t)C$. По шагу 1 это решение ЛОС. По выбору C выполнено $w(t_0) = v(t_0)$. Теорема единственности для линейной системы даёт $w \equiv v$ на I. Тем самым доказано, что комбинации ФСР исчерпывают все решения, а не только некоторую их часть.

Шаг 3. Коэффициенты представления единственны. Если $XC = XD$ для всех t, то при $t = t_0$ получаем $X(t_0)(C - D) = 0$. Невырожденность даёт $C = D$. Можно также сослаться на независимость ФСР, но уравнение в одной точке делает причину особенно прозрачной.

Существование ФСР. Зафиксируем $t_0 \in I$. Для каждого стандартного базисного вектора e_j решим задачу $u' = Au$, $u(t_0) = e_j$. По билету 12 все n решений существуют на I. Матрица их значений в t_0 равна E, поэтому её определитель равен единице. По билету 13 они независимы и образуют ФСР. Значит, определение ФСР не предполагает существование неизвестного объекта без доказательства.

Из доказанного следует, что пространство решений имеет размерность ровно n. Линейное отображение $u \mapsto u(t_0)$ из пространства решений в $\mathbb{R}^n$ биективно: существование даёт сюръективность, единственность даёт инъективность.

Переход между фундаментальными матрицами

Теорема. Если X есть фундаментальная матрица, то все фундаментальные матрицы той же системы и на том же интервале имеют вид

$$Y(t) = X(t)P,$$

где P есть постоянная невырожденная матрица. Важно, что множитель стоит *справа*.

Краткое обоснование полезно даже при требовании только формулировки. Каждый столбец Y является решением и потому имеет единственное разложение по столбцам X с постоянными коэффициентами. Соберём коэффициенты столбцов в матрицу P: получится $Y = XP$. Из $\det Y = \det X \det P \neq 0$ следует $\det P \neq 0$. Обратно, если P постоянна и невырождена, то $(XP)' = AXP$ и $\det(XP) \neq 0$. Все условия фундаментальности выполнены.

Для фиксированного t_0 единственная фундаментальная матрица с начальным значением E называется нормированной в t_0:

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}, \qquad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Она не зависит от выбора X: при замене X на XP матрицы P и P^{-1} сокращаются в правильном порядке.

Разобранный пример

Рассмотрим систему $u_1' = u_1 + u_2$, $u_2' = u_2$. Второе уравнение даёт $u_2 = C_2 e^t$, затем $u_1' - u_1 = C_2 e^t$, откуда $u_1 = e^t(C_1 + C_2 t)$. Таким образом,

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка даёт $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, а $\det X = e^{2t} \neq 0$. Следовательно, это фундаментальная матрица, причём $X(0) = E$.

Найдём решение с $u(1) = (2, 1)^{\mathsf{T}}$. Условие $X(1)C = u(1)$ даёт

$$eC_2 = 1, \qquad e(C_1 + C_2) = 2,$$

поэтому $C_1 = C_2 = e^{-1}$. Искомое решение:

$$u(t) = e^{t-1} \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, начальные значения удобно задавать в любой точке, а не только там, где $X = E$.

Если выбрать новый базис $v^1 = u^1$, $v^2 = u^1 + u^2$, получим

$$Y = XP, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это другая фундаментальная матрица той же системы. Один и тот же вектор решения записывается как $XC = YD$ при $D = P^{-1}C$; поменялись координаты, но не решение.

Ответ у доски

Сначала назвать систему, непрерывность коэффициентов и интервал. Дать определения ФСР и фундаментальной матрицы. В доказательстве общего решения не пропускать обратную часть: выбрать произвольное решение, подобрать коэффициенты по его значению в t_0, применить единственность. Затем сказать, почему коэффициенты единственны и почему ФСР существует. Завершить формулой $Y = XP$ с постоянной невырожденной матрицей справа.

Проверка себя

1. Обязана ли фундаментальная матрица удовлетворять $X(t_0) = E$? **Ответ:** нет; это дополнительная нормировка.
2. Достаточно ли $\det X \neq 0$, чтобы X была фундаментальной матрицей заданной системы? **Ответ:** нет; необходимо также $X' = AX$.
3. Почему PX в общем случае не есть фундаментальная матрица? **Ответ:** $(PX)' = PAX$, тогда как требуется APX; матрицы P и A не обязаны коммутировать.
4. Для $X(t) = \operatorname{diag}(e^t, e^{-t})$ найдите решение с $u(2) = (3, 4)^\mathsf{T}$. **Ответ:** $u = (3e^{t-2}, 4e^{2-t})^\mathsf{T}$.

Частые ошибки

Принимать любые n решений за ФСР; забывать проверку независимости; доказывать лишь то, что комбинация является решением; умножать матрицу перехода слева; разрешать её коэффициентам зависеть от времени; писать $C = u^0$, когда $X(t_0) \neq E$.