БИЛЕТ 13

Линейная зависимость вектор-функций и вронскиан

Источники: Лекции: PDF 57-60; основной сборник: PDF 56-59; старый вопросник: PDF 26-27

Объём ответа: Доказать связи между зависимостью функций, их значений и вронскианом; отдельно доказать лемму для решений одной ЛОС.

Доработка по фотографиям: вопрос 11

IMG_1972–IMG_1974; главы 13.

Что требуется. Определения с кванторами; импликации; специальная лемма для решений одной ЛОС.

Линейная зависимость означает существование одного ненулевого набора постоянных c_j, для которого $\sum c_j x_j(t) = 0$ при всех t. Коэффициенты, выбранные заново в каждой точке, не являются такой зависимостью.

Для произвольных вектор-функций $W(t) \equiv 0$ не влечёт зависимости. Например, $x_1 = (1, t)^T$, $x_2 = (t, t^2)^T$: определитель нулевой всюду, но из $c_1 + c_2 t \equiv 0$ следуют $c_1 = c_2 = 0$.

Восстановим специальную лемму. Если все x_j решают одну ЛОС, из $W(t_0) = 0$ получаем ненулевые постоянные c_j с $z(t_0) = \sum c_j x_j(t_0) = 0$. Суперпозиция делает z решением той же ЛОС. Единственность задачи с нулевым начальным вектором даёт $z \equiv 0$. Здесь используются оба условия: одна и та же система и единственность.

Понять смысл: два разных вида зависимости

Векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы, если один нетривиальный набор чисел превращает их линейную комбинацию в нуль. Для функций требуется больше: одни и те же числа должны давать нуль при всех значениях аргумента. Если в каждой точке разрешить выбирать новые коэффициенты, получится другое, существенно более слабое условие.

Этот билет нужен, чтобы перейти от отдельных найденных решений к базису всего пространства решений. Вронскиан быстро проверяет независимость значений. Но превратить информацию в одной точке в утверждение на интервале можно лишь при дополнительных условиях. Для решений одной линейной однородной системы эту роль выполняет единственность задачи Коши.

Определения и порядок кванторов

Пусть $u^1, \dots, u^k : I \to \mathbb{R}^n$. Они **линейно зависимы на** I, если существуют постоянные $c_1, \dots, c_k$, не все нулевые, такие что

$$\sum_{j=1}^{k} c_j u^j(t) = 0 \qquad \text{при всех } t \in I.$$

Они **линейно независимы**, если такое тождество возможно лишь при $c_1 = \dots = c_k = 0$. Для скалярных функций определение то же, только значения лежат в $\mathbb{R}$. Можно также работать над $\mathbb{C}$, но поле коэффициентов надо сохранять во всём рассуждении.

Зависимость функций означает

$$\exists c \neq 0 \;\; \forall t \in I : \; \sum_j c_j u^j(t) = 0.$$

Зависимость значений в каждой точке означает

$$\forall t \in I \;\; \exists c(t) \neq 0 : \; \sum_j c_j(t) u^j(t) = 0.$$

Переставить эти кванторы нельзя. Функции $1, t, t^2$ могут быть независимы как скалярные функции, хотя любые два их значения при фиксированном t являются числами, то есть векторами одномерного пространства.

Для ровно n вектор-функций размерности n определим матрицу и её **вронскиан**:

$$X(t) = (u^1(t) \;\cdots\; u^n(t)), \qquad W(t) = \det X(t).$$

Столбец есть целая вектор-функция. Производные в этом определении не добавляются: скалярный вронскиан с производными появится в билете 17 после перехода к системе.

Общие утверждения и доказательства

1. Зависимость функций влечёт зависимость значений в любой точке. Пусть $\sum_j c_j u^j(t) \equiv 0$ с фиксированным ненулевым набором c. При любом $t_0 \in I$ подстановка $t = t_0$ даёт $\sum_j c_j u^j(t_0) = 0$. Коэффициенты остались теми же и не стали все нулевыми. Значит, векторы значений зависимы.

Обратное утверждение неверно. На $I = \mathbb{R}$ рассмотрим

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В каждой точке два вектора коллинеарны. Но тождество $c_1 + c_2 t \equiv 0$ даёт при $t = 0$ число $c_1 = 0$, затем при $t = 1$ число $c_2 = 0$. Поэтому вектор-функции независимы.

2. Для n вектор-функций зависимость влечёт $W \equiv 0$. По предыдущему пункту столбцы $X(t)$ зависимы при каждом фиксированном t. По свойству определителя $\det X(t) = 0$ при всех $t \in I$. Для этого результата не требуются дифференцируемость функций или наличие какого-либо ОДУ.

3. Если $W(t_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке, функции независимы. Если бы они были зависимы, пункт 2 дал бы $W(t_0) = 0$. Получено противоречие. Можно рассуждать прямо: из $X(t)c \equiv 0$ следует $X(t_0)c = 0$; невырожденность $X(t_0)$ даёт $c = 0$.

Обратное к пункту 2 для произвольных функций неверно: у только что рассмотренных u^1, u^2 вронскиан тождественно нулевой, но функции независимы. Даже гладкость обеих функций не спасает обратное утверждение.

Главная лемма для решений ЛОС

Лемма. Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, где I есть интервал, а $u^1, \dots, u^n$ являются решениями *одной и той же* системы $u' = A(t)u$. Если $W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$, то эти решения линейно зависимы на всём I и $W \equiv 0$ на I.

Доказательство. Нулевой определитель $X(t_0)$ означает существование числового вектора $c \neq 0$ такого, что $X(t_0)c = 0$. Зафиксируем этот набор чисел и введём

$$v(t) = X(t)c = \sum_{j=1}^{n} c_j u^j(t).$$

Благодаря линейности и постоянству коэффициентов

$$v'(t) = \sum_j c_j (u^j)'(t) = \sum_j c_j A(t) u^j(t) = A(t)v(t).$$

Кроме того, $v(t_0) = 0$. Нулевая функция также удовлетворяет системе и тем же начальным данным. Непрерывность A обеспечивает единственность задачи Коши на I, поэтому $v(t) \equiv 0$. Полученное тождество использует один фиксированный ненулевой набор c; это именно линейная зависимость функций. По общему утверждению их вронскиан равен нулю всюду. Доказательство завершено.

Здесь нельзя опустить предложение о том, что линейная комбинация является решением. Именно оно позволяет применить единственность. Для произвольных функций нет общей задачи Коши, в которой можно было бы сравнить v с нулевым решением.

Альтернатива для вронскиана. У n решений одной ЛОС с непрерывной матрицей возможны ровно два случая:

- решения зависимы и $W(t) = 0$ при всех $t \in I$;
- решения независимы и $W(t) \neq 0$ при всех $t \in I$.

Независимость означает, что первый случай невозможен; если бы во втором случае появился хотя бы один нуль, лемма вернула бы нас в первый. Поэтому у фундаментального вронскиана не бывает изолированных нулей.

Более общая версия не требует $k = n$: если k решений одной ЛОС имеют зависимые значения в одной точке, то сами решения зависимы. Доказательство тем же $v = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j$ дословно сохраняется. Однако для прямого использования квадратного определителя $n \times n$ нужно именно n столбцов. При $k < n$ можно исследовать ранг матрицы значений.

Разобранные применения

Пусть $u' = \operatorname{diag}(1,-1)u$. Даны

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Сначала проверяем, что обе функции действительно решают одну систему: производная первой компоненты совпадает с ней самой, производная второй равна её отрицанию. Затем

$$W(t) = e^t(-e^{-t}) - 2e^t e^{-t} = -3 \neq 0.$$

Следовательно, решения независимы на всей прямой. Для этого вывода было бы достаточно $W(0) = -3$ вместе с принадлежностью одной ЛОС.

Теперь предположим, что предложены «два решения непрерывной ЛОС на $(-1,1)$» с матрицей столбцов

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Их вронскиан равен t: он нулевой при 0 и ненулевой при $\frac{1}{2}$. По альтернативе такое описание невозможно. Не требуется угадывать $A(t)$: несовместимость уже доказана. На интервале $(0,1)$ препятствия нет; там можно определить $A = X'X^{-1}$, и она непрерывна.

Ответ у доски

Сначала подчеркнуть постоянство коэффициентов в определении зависимости. Затем доказать цепочку «зависимость функций $\Rightarrow$ зависимость значений $\Rightarrow W \equiv 0$» и её контрапозицию. Показать один контрпример к обращению. Для специальной леммы произнести пять шагов: нулевой определитель; фиксированный ненулевой набор коэффициентов; линейная комбинация решений; нулевые начальные данные; единственность. Закончить альтернативой для вронскиана.

Проверка себя

1. Может ли ненулевое решение ЛОС обратиться в нулевой *вектор* в один момент? **Ответ:** нет: оно совпало бы с нулевым решением по единственности. Отдельная компонента обращаться в нуль может.
2. Зависимы ли $u^1 = (\cos t, \sin t)^{\mathsf{T}}$ и $u^2 = (-\sin t, \cos t)^{\mathsf{T}}$? **Ответ:** нет; $W = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
3. У n произвольных вектор-функций $W(t_0) = 0$. Доказана ли зависимость? **Ответ:** нет; доказана лишь зависимость их значений в точке. Даже $W \equiv 0$ в общем случае недостаточно.
4. Почему интервал важнее произвольного множества? **Ответ:** единственность переносит равенство по связному интервалу. На несвязных частях можно выбирать разные комбинации и начальные данные независимо.

Частые ошибки

Разрешать коэффициентам зависимости меняться с t; считать $W(t_0) = 0$ универсальным критерием зависимости; применять лемму к решениям разных систем или к ЛНС; путать нуль одной координаты с нулём вектора; добавлять в системный вронскиан лишние строки производных.