БИЛЕТ 12

Нормальные системы ОДУ. Линейные однородные и неоднородные системы

Источники: Лекции: PDF 51-55; основной сборник: PDF 50-55; старый вопросник: PDF 24-25

Объём ответа: Определения и теорема; обязательна проверка её условий для линейной системы. Обоснование глобального продолжения приведено отдельно.

Связь с фотографиями

Эта глава продолжает вопрос 10 тетради; доработка и точное соответствие находятся в начале главы 11.

Понять смысл

Несколько величин могут изменяться совместно: скорость одной зависит от текущих значений остальных. Нормальная система объединяет эти зависимости в одно векторное уравнение. Слово «нормальная» означает, что первые производные всех неизвестных уже выражены через независимую переменную и сами неизвестные. Оно не означает ни линейность, ни отсутствие особенностей.

Важнейшее различие нелинейной и линейной теорий касается времени существования. Для гладкой нелинейной системы обычно гарантирована лишь окрестность начального момента. Если же матрица линейной системы и свободный член непрерывны на интервале I, любое её решение существует на всём I. Это основание для последующих рассуждений о пространстве решений, фундаментальной матрице и вронскиане.

Определения

Нормальная система из n уравнений первого порядка имеет вид

$$u_i' = F_i(t, u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n, \qquad \text{или} \qquad u' = F(t, u).$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_n)^{\mathsf{T}}$, $F : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто. Решением на интервале I называется $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, график которого лежит в G и для которого $u'(t) = F(t, u(t))$ при всех $t \in I$. Задача Коши задаёт дополнительно один вектор

$$u(t_0) = u^0, \qquad (t_0, u^0) \in G.$$

Это n скалярных условий, а не одно скалярное условие.

Линейная система записывается как

$$u' = A(t)u + f(t), \qquad A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}.$$

Коэффициенты A и вектор f зависят только от t. При $f \equiv 0$ это линейная однородная система, сокращённо ЛОС. При $f \not\equiv 0$ это линейная неоднородная система, ЛНС. Например,

$u_1' = tu_1 + e^t u_2$ линейно по неизвестным, хотя коэффициенты не постоянны; слагаемые $u_1 u_2$, u_1^2, $\sin u_2$ делают систему нелинейной.

Точная локальная теорема

Теорема. Пусть F непрерывна в открытой области G, все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ существуют и непрерывны в G. Тогда для каждой точки $(t_0, u^0) \in G$ существует $h > 0$ и единственное локальное решение задачи Коши на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Два решения с этими данными совпадают на общем интервале определения, содержащем t_0.

Как и в скалярном случае, условие на производные можно заменить локальным условием Липшица по всему вектору u. При этом норма измеряет расстояние между состояниями, а не покомпонентное совпадение только одной координаты:

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \le L\|u - v\|.$$

Чтобы получить один L, выбирают небольшую выпуклую по u окрестность внутри G и оценивают на ней матрицу производных.

Для количественной оценки можно взять цилиндр

$$|t - t_0| \le a, \qquad \|u - u^0\| \le b$$

целиком внутри G и обозначить через M максимум $\|F\|$ на нём. Тогда стандартная теорема даёт гарантированный шаг $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ при $M > 0$. При $M = 0$ можно взять $h = a$. В старом вопроснике используется шар радиуса r в пространстве (t, u) и оценка $h = \frac{r}{\sqrt{1+M^2}}$. Это два способа контролировать выход графика из выбранной окрестности; они не определяют максимальный интервал решения.

Применение к линейной системе

Теорема. Если все элементы $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны на интервале I, то при любых $t_0 \in I$ и $u^0 \in \mathbb{R}^n$ задача

$$u' = A(t)u + f(t), \qquad u(t_0) = u^0$$

имеет единственное решение на всём I.

Локальная часть: обязательная проверка. Полагаем $F(t,u) = A(t)u + f(t)$ на $G = I \times \mathbb{R}^n$. Каждая компонента

$$F_i(t,u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j + f_i(t)$$

непрерывна по всем аргументам. Кроме того,

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = a_{ij}(t),$$

и эта производная непрерывна. Начальная точка допустима для любого конечного u^0. Поэтому локальные существование и единственность доказаны. Та же мысль выражается оценкой

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \le \|A(t)\|\,\|u - v\|.$$

На каждом компактном временном отрезке норма $A(t)$ имеет конечный максимум.

Почему решение продолжается на весь интервал. Этот дополнительный шаг нужен, если требуется обосновать глобальную формулировку. Зафиксируем $T > t_0$, $[t_0, T] \subset I$, и выберем $K, B \geq 0$ так, что $\|A(t)\| \leq K$, $\|f(t)\| \leq B$ на этом отрезке. Интегральная запись даёт

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| + B(T - t_0) + K \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|\, ds.$$

Обозначим первую сумму через a, а правую часть через $q(t)$. Тогда $\|u(t)\| \leq q(t)$, $q(t_0) = a$ и $q' \leq Kq$. Следовательно,

$$(e^{-K(t-t_0)} q(t))' \leq 0, \qquad \|u(t)\| \leq a e^{K(t-t_0)}.$$

Решение не может стать бесконечным до T. Более того, $\|u'\| \leq Kae^{K(T-t_0)} + B$, поэтому оно липшицево по времени и имеет конечный предел при любом предполагаемом конечном правом конце $\beta < T$. В точке $(\beta, \lim_{t \uparrow \beta} u(t))$ снова применима локальная теорема. Она продолжает решение и противоречит максимальности β. Слева рассуждение повторяется с обратным направлением времени. Так как любой конечный компактный отрезок внутри I допустим, решение определено на всём I.

Разобранный пример

Решим систему

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + 2u_2, \\ u_2' = -u_2 + e^t, \end{cases} \qquad u_1(0) = a, \quad u_2(0) = b.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ постоянна, $f = (0, e^t)^{\mathsf{T}}$ непрерывен на $\mathbb{R}$. До вычислений уже известно, что задача имеет ровно одно глобальное решение.

Второе уравнение независимо от u_1. Умножая его на e^t, получаем $(e^t u_2)' = e^{2t}$, откуда

$$u_2(t) = \frac{1}{2} e^t + \left(b - \frac{1}{2}\right) e^{-t}.$$

Теперь $u_1' - u_1 = e^t + (2b - 1)e^{-t}$, поэтому

$$(e^{-t} u_1)' = 1 + (2b - 1)e^{-2t}.$$

Интегрирование от 0 до t сразу учитывает данные:

$$u_1(t) = e^t \left[a + t + \left(b - \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-2t}) \right].$$

Подстановка $t = 0$ проверяет оба начальных условия. Второе равенство проверяется непосредственно, первое удобно проверить в форме $(e^{-t} u_1)' = 2e^{-t} u_2$. Возрастание решения при $t \to \infty$ не противоречит глобальному существованию: для каждого конечного t обе компоненты конечны.

Ответ у доски

Записать $u' = F(t, u)$; определить решение и векторное начальное условие; сформулировать локальную теорему. После этого записать $A(t)u + f(t)$, различить ЛОС и ЛНС и вычислить

$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = a_{ij}$. Отдельно произнести глобальный линейный результат. Если спрашивают, почему «на всём интервале», объяснить ограниченность решения на любом компактном временном отрезке и продолжение через конечный предел.

Проверка себя

1. Линейна ли система $u_1' = tu_2$, $u_2' = u_1 + \sin t$? **Ответ:** да, ЛНС; $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = (0, \sin t)^{\mathsf{T}}$; все задачи Коши глобально разрешимы на $\mathbb{R}$.
2. Что гарантирует теорема для $u' = \frac{u}{t}$ при $u(1) = 2$? **Ответ:** единственное решение на $(0, \infty)$, а именно $u = 2t$. Эта конкретная функция продолжается через нуль, но уравнение в нуле не определено.
3. Обязано ли решение гладкой нелинейной системы быть глобальным? **Ответ:** нет; $u_1' = u_1^2$, $u_2' = 0$, $u(0) = (1, 0)^{\mathsf{T}}$ даёт $u_1 = \frac{1}{1-t}$.

Частые ошибки

Считать любую систему с переменными коэффициентами нелинейной; определять однородность по отсутствию постоянных чисел вместо условия $f \equiv 0$; проверять только диагональные частные производные; выводить глобальность непосредственно из локальной теоремы; путать существование на всей прямой с ограниченностью решения.