БИЛЕТ 11

Теорема существования и единственности для уравнения высшего порядка

Источники: Лекции: PDF 49-50; основной сборник: PDF 47-49; старый вопросник: PDF 23

Объём ответа: Точная формулировка; сведение к системе дано для понимания, полного доказательства общей теоремы билет не требует.

Доработка по фотографиям: вопрос 10

IMG_1968–IMG_1971; главы 11, 12.

Что требуется. Нормальная система, решение и задача Коши; ЛОС/ЛНС; теорема для непрерывных коэффициентов.

Верхний индекс в записи тетради $x^1, \dots, x^n$ — номер координаты. Для $\dot{x} = F(t, x)$ задача Коши задаёт все координаты $x(t_0) = x_0$. Непрерывность F и локальная липшицевость по вектору дают локальное существование и единственность. Непрерывные частные производные по координатам — достаточное условие липшицевости на малом прямоугольнике.

Для $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ с непрерывными A, f решение существует на всём общем интервале их непрерывности. На каждом компактном отрезке $\|F(t,u) - F(t,v)\| \le \|A(t)\|\|u - v\|$, а линейный рост по x исключает конечный взрыв внутри этого интервала.

Переход от $y^{(n)} = H(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ к системе: $x_1 = y, \dots, x_n = y^{(n-1)}$. Первые $n-1$ уравнений $\dot{x}_j = x_{j+1}$, последнее $\dot{x}_n = H(t, x_1, \dots, x_n)$. Нужно задать ровно n начальных значений.

Понять смысл

Уравнение второго порядка описывает изменение не только положения, но и скорости. Поэтому для однозначного движения обычно нужно задать две величины: положение и скорость в один момент. Для уравнения порядка n роль начального состояния играет набор из n чисел: значение функции и значения первых $n-1$ производных. Теорема отвечает на два разных вопроса: существует ли движение из такого состояния и может ли из него получиться больше одного движения.

Слова «разрешённое относительно старшей производной» означают, что уравнение записано как

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Именно $y^{(n)}$ выражена однозначно. Из неявного уравнения $(y'')^2 = y$ нельзя сразу получить одну такую задачу: выбор знака $y'' = \pm\sqrt{y}$ меняет уравнение. Если старшая производная умножена на коэффициент, сначала надо проверить, где этот коэффициент отличен от нуля.

Определения и точная формулировка

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто, а f определена в G. Решение на интервале I есть функция $y \in C^n(I)$, для которой

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G$$

и исходное равенство выполняется при каждом $x \in I$. Таким образом, проверяются и уравнение, и допустимость всех аргументов его правой части.

Задача Коши состоит в нахождении такого решения с условиями

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Все данные задаются в одной точке. Условия $y(a) = A$, $y(b) = B$ при $a \neq b$ образуют краевую задачу; рассматриваемая теорема к ней напрямую не относится.

Теорема. Пусть $f = f(x, z_0, \dots, z_{n-1})$ непрерывна в открытой области G, в ней существуют и непрерывны все частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}, \qquad j = 0, \dots, n-1,$$

а точка $(x_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ принадлежит G. Тогда существует $h > 0$, для которого задача Коши имеет решение на $[x_0 - h, x_0 + h]$, и это решение единственно локально. Точнее, любые два решения с указанными начальными данными совпадают на общем интервале определения, содержащем x_0, пока их графики лежат в G.

В записи f переменные z_j независимы. При проверке гипотез нельзя подставить предполагаемое решение, а потом продифференцировать по x: требуется частная производная правой части по одному фазовому аргументу. Производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ в условиях теоремы не нужна. Например, непрерывный коэффициент $|x|$ не мешает применению теоремы.

Непрерывность частных производных является удобным достаточным условием. Более общая версия требует непрерывности f и локального условия Липшица по вектору $(z_0, \dots, z_{n-1})$, равномерного по x в достаточно малой окрестности начальной точки. Отсутствие частной производной не доказывает неединственность: возможно, более слабое условие всё равно выполняется.

Почему получается именно такая теорема

Положим $t = x$ и введём состояние

$$u_1(t) = y(t), \quad u_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad u_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Тогда исходная задача превращается в нормальную систему

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ \quad \vdots \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = f(t, u_1, \dots, u_n), \end{cases} \qquad u(t_0) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})^{\mathsf{T}}.$$

Первые $n-1$ компонент правой части линейны по координатам состояния; их производные равны нулю или единице. Последняя компонента удовлетворяет гипотезам по условию. Значит, применима теорема существования и единственности для нормальной системы.

Обратный переход тоже важен. Из первых уравнений системы следует $u_2 = u_1'$, затем $u_3 = u_1''$ и так далее. Поэтому $y = u_1$ обладает n производными и удовлетворяет исходному уравнению. Нельзя ограничиться фразой «ввели переменные»: эквивалентность требует возможности вернуться к скалярной функции. Разные скалярные решения породили бы разные системные решения с одинаковым начальным вектором, что противоречит единственности системы.

Почему гладкость даёт Липшица? На небольшом замкнутом прямоугольнике внутри G все $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ ограничены. Соединяя два фазовых вектора отрезком и интегрируя производную f вдоль него, получаем

$$|f(x,z) - f(x,\tilde z)| \le L\|z - \tilde z\|.$$

Один и тот же L подходит для всех точек этого прямоугольника. Это объяснение связывает новый билет с теоремой первого порядка, но не заменяет полного доказательства общей теоремы Пикара.

Как применять теорему

1. Выделить старшую производную и записать f с независимыми фазовыми аргументами.
2. Указать открытую область, где правая часть имеет смысл. Особое внимание уделить знаменателям, логарифмам и корням.
3. Проверить непрерывность f и всех нужных частных производных в окрестности начальной точки.
4. Проверить принадлежность начальной точки области и сформулировать именно локальный вывод.

Для общей нелинейной задачи нельзя добавить «решение существует при всех x» только потому, что правая часть гладкая во всём пространстве. Например, для $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ функция

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1,$$

удовлетворяет задаче и не продолжается через $x = 1$ как конечное классическое решение. Правая часть при этом является многочленом.

Разобранный пример

Рассмотрим

$$y'' = y' + |x|y, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1.$$

Здесь $f(x, z_0, z_1) = z_1 + |x| z_0$ непрерывна на $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = |x|, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 1.$$

Обе производные непрерывны, начальная точка $(0, 2, -1)$ допустима. Следовательно, имеется единственное локальное решение. Недифференцируемость $|x|$ по x в нуле не нарушает ни одного условия.

Уравнение линейно; после сведения к системе её коэффициенты непрерывны на всей прямой. Теорема следующего билета дополнительно даст существование при всех $x \in \mathbb{R}$. Это отдельное обоснование глобальности, а не часть локального вывода.

Для сравнения, задача $xy'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ вообще не имеет классического решения в окрестности нуля: подстановка $x = 0$ потребовала бы $0 = 1$. Деление на x не устраняет это противоречие, а исключает начальную точку из области.

Ответ у доски

Назвать разрешённую форму, определить решение и выписать все n начальных данных. Затем назвать область G, непрерывность f, непрерывность частных производных по фазовым аргументам и допустимость начальной точки. Сделать локальный вывод. По просьбе объяснить механизм: вектор из функции и её производных превращает уравнение в систему первого порядка; первые строки обеспечивают обратный переход.

Проверка себя

1. Применима ли теорема к $y''' = \sin x + y^2 + e^{y''}$ при любых конечных начальных данных? **Ответ:** да, локально; все требуемые функции гладкие на $\mathbb{R}^4$.
2. Что можно утверждать для $y'' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = y'(0) = 0$ по сформулированной теореме? **Ответ:** эта версия теоремы неприменима. Более того, есть $y \equiv 0$ и решения $y = 0$ при $x \le a$, $y = \frac{(x-a)^4}{144}$ при $x \ge a$, $a \ge 0$; они класса C^2 и имеют те же данные в нуле.
3. Сколько условий нужно для задачи Коши четвёртого порядка? **Ответ:** четыре: y, y', y'', y''' в одной точке; $y^{(4)}(x_0)$ определяется уравнением.

Частые ошибки

Проверять только непрерывность f и заявлять единственность; забывать часть фазовых производных; требовать производную по x; смешивать задачу Коши с краевой; считать неприменимость теоремы доказательством отсутствия решения; делать глобальный вывод из локальной теоремы.