БИЛЕТ 10

Однородные уравнения первого порядка

Источники: Лекции: с. 39-44 PDF. Сборник Якуба: с. 43-46 PDF. Сопоставление: старый сборник, с. 21-22 PDF.

Объём ответа: Доказать существование и единственность в секторе без инвариантных лучей; доказать сохранение семейства при гомотетии; определить инвариантный луч.

Доработка по фотографиям: вопрос 9

IMG_1965–IMG_1967; главы 10.

Что требуется. Замена; доказательство единственности вне инвариантных лучей; подобие интегральных кривых; инвариантный луч.

Для $y' = F(y/x)$, $x \neq 0$, вводим $u = y/x$: $y' = u + xu'$, поэтому $xu' = F(u) - u$. При $F(u) - u \neq 0$ это разделяющееся уравнение; единственность следует из предыдущего вопроса даже без дифференцируемости F.

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Корни $F(k) = k$ нельзя потерять при делении: $y = kx$ является решением на каждом допустимом полулуче $x > 0$ или $x < 0$. Через $x = 0$ исходная дробная постановка не проходит.

При положительной гомотетии $(x, y) \mapsto (cx, cy)$ отношение y/x не меняется, а $\ln|cx| = \ln|x| + \ln c$ меняет только константу. Поэтому семейство кривых сохраняется на той части области, куда действует гомотетия. Не следует объявлять одну кривую неизменной: в общем случае она переходит в другую кривую семейства.

Понять смысл

Однородность в этом билете означает, что наклон поля зависит только от отношения $\frac{y}{x}$. Все точки одного луча из начала координат имеют одинаковое отношение координат, следовательно, одинаковый наклон. Если растянуть рисунок от начала координат, поле направлений согласуется с этим растяжением.

Не путайте этот термин с линейным однородным уравнением $y' + a(x)y = 0$. Здесь слово описывает масштабную симметрию правой части, а не отсутствие свободного слагаемого в линейном операторе. Уравнение $y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$ однородно в нынешнем смысле и при этом нелинейно по y.

Точная формулировка

Уравнение первого порядка рассматриваемого типа записывается как

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Правая часть $H(x,y)=F(\frac{y}{x})$ однородна нулевой степени:

$$H(kx,ky)=H(x,y)$$

при допустимом $k\neq 0$. В более общей постановке однородность на конусе часто задают лишь для $k>0$; мы всегда учитываем, остаётся ли преобразованная точка в области уравнения.

Пусть F непрерывна на интервале $J=(a,b)$. Тогда область естественно разбивается на два сектора

$$D_+=\{(x,y):x>0,\ \frac{y}{x}\in J\},\qquad D_-=\{(x,y):x<0,\ \frac{y}{x}\in J\}.$$

Прямая $x=0$ в эту нормальную запись не входит. При изучении одного решения знак x фиксирован на всём его интервале.

Теорема существования и единственности. Если $F\in C(J)$ и

$$F(v)-v\neq 0\quad\text{для всех } v\in J,$$

то через каждую точку D_+ или D_- проходит единственное локальное решение. Непрерывной производной F' не требуется. Условие $F(v)\neq v$ выделяет сектор, в котором нет инвариантных лучей.

Доказательство существования и единственности

Сделаем обратимую при $x\neq 0$ замену

$$v(x)=\frac{y(x)}{x},\qquad y(x)=xv(x).$$

По правилу произведения $y'=v+xv'$. Поэтому исходное уравнение равносильно

$$v+xv'=F(v),\qquad v'=\frac{1}{x}(F(v)-v).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. На любой окрестности $x_0\neq 0$ функция $\frac{1}{x}$ непрерывна. Множитель $q(v)=F(v)-v$ непрерывен и ненулевой на J. По теореме билета 9 существует единственное локальное решение для условия

$$v(x_0)=v_0=\frac{y_0}{x_0}.$$

Функция $y=xv$ тогда является решением исходного уравнения и удовлетворяет $y(x_0)=y_0$. Любое другое решение y породило бы другое решение $v=\frac{y}{x}$ той же задачи, что противоречит единственности. Обратимость замены переносит и существование, и единственность.

Можно явно записать неявную формулу. Положим

$$G(v)=\int_{v_*}^{v}\frac{d\eta}{F(\eta)-\eta},\qquad v_*\in J.$$

Функция G строго монотонна. Интегрирование даёт

$$G(v(x))-G(v_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{s}=\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|,$$

или

$$G\left(\frac{y}{x}\right)-\ln|x|=C.$$

Для извлечения решения выбирают такой интервал около x_0, чтобы аргумент обратной функции G^{-1} лежал в $G(J)$, как в билете 9. Нельзя молча считать, что этот интервал непременно совпадает со всей полуосью.

Гомотетия: точное утверждение и доказательство

Если $y = \varphi(x)$ решает исходное уравнение на I, а масштаб $k > 0$ сохраняет область, то

$$\psi(x) = k\varphi(\frac{x}{k}), \qquad x \in kI,$$

тоже является решением. Её график получается гомотетией $(x, y) \mapsto (kx, ky)$ с центром в начале координат. Дифференцирование даёт

$$\psi'(x) = \varphi'(\frac{x}{k}) = F\left(\frac{\varphi(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}}\right) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right).$$

Следовательно, семейство интегральных кривых сохраняется при гомотетии. Для $k < 0$ та же вычислительная проверка верна, если область допускает переход в противоположный сектор.

Неявная формула объясняет изменение постоянной. После растяжения старой кривой имеем

$$G\left(\frac{ky}{kx}\right) - \ln|kx| = G\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| - \ln k = C - \ln k.$$

Таким образом, C переходит в $C - \ln k$. В одном фиксированном секторе без инвариантных лучей максимальные члены этого семейства с разными C получаются друг из друга положительными гомотетиями.

Последняя оговорка существенна. Нельзя утверждать, что любые две интегральные кривые во всех секторах обязательно гомотетичны: гомотетия сохраняет отношение $\frac{y}{x}$, не меняет наклон прямого луча и не переносит один диапазон наклонов в другой. Универсальное свойство состоит в сохранении семейства, а взаимное подобие относится к соответствующей неинвариантной семье внутри сектора.

Инвариантные лучи

Луч $y = kx$, $x > 0$ или $x < 0$, называется инвариантным, если его график является решением. Подстановка даёт необходимое и достаточное условие:

$$y' = k, \qquad F(\frac{y}{x}) = F(k), \qquad F(k) = k.$$

Корни уравнения $F(k) - k = 0$ называются возможными наклонами инвариантных лучей. Начало координат не включается, поскольку исходное уравнение не определено при $x = 0$. Один допустимый наклон обычно задаёт два противоположных луча, если оба сектора входят в область.

При разделении на $F(v) - v$ инвариантные решения теряются, поэтому их обязательно ищут до деления. При дополнительной локальной липшицевости F они подчиняются обычной теореме единственности. При одной непрерывности через точку инвариантного луча иногда могут проходить и другие решения. Следовательно, доказанная выше теорема специально не охватывает корни $F(v) - v$.

Пример: нелинейное однородное уравнение

Рассмотрим

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Здесь $F(v) = v^2 + v$. Инвариантные наклоны определяются равенством $v^2 = 0$, поэтому $y \equiv 0$ даёт по одному лучу на каждой полуоси. Для ненулевых решений замена $y = xv$ приводит к

$$xv' = v^2, \qquad -\frac{1}{v} = \ln|x| + C, \qquad y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Начальное условие даёт $1 = -\frac{1}{C}$, значит, $C = -1$ и

$$y(x) = \frac{x}{1 - \ln x}, \qquad 0 < x < e.$$

Интервал должен содержать 1, сохранять $x > 0$ и не пересекать нуль знаменателя. Производная равна

$$y' = \frac{2 - \ln x}{(1 - \ln x)^2},$$

а правая часть после подстановки равна той же дроби. При $x \to e-$ решение стремится к $+\infty$. При $x \to 0+$ оно стремится к нулю, но продолжения через нуль для исходной нормальной записи нет.

Гомотетия с коэффициентом $k > 0$ переводит решение в

$$\psi(x) = \frac{x}{1 + \ln k - \ln x}, \qquad 0 < x < ke.$$

Она меняет масштаб и положение вертикальной асимптоты, сохраняя форму семейства. Нулевые лучи при положительной гомотетии переходят сами в себя.

Что может случиться на инвариантном луче

Условие отсутствия инвариантных лучей в теореме нельзя вычеркнуть, сохранив только непрерывность F. Возьмём

$$F(v) = v + \sqrt{|v|}, \qquad x > 0.$$

Наклон $v = 0$ задаёт инвариантный луч $y = 0$. Через точку $(1, 0)$ проходит как нулевое решение, так и функция

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{x(\ln x)^2}{4}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Проверим вторую ветвь. Для $x > 1$ положим $v = \frac{y}{x} = \frac{(\ln x)^2}{4}$. Тогда

$$y' = v + \frac{\ln x}{2} = v + \sqrt{|v|} = F(v).$$

При $x < 1$ всё равно нулю. В точке 1 сама функция и производная правой ветви стремятся к нулю, поэтому склейка дифференцируема и удовлетворяет уравнению. Единственность через точку инвариантного луча нарушена.

В секторах $v > 0$ и $v < 0$ множитель $F(v) - v = \sqrt{|v|}$ ненулевой, и доказанная теорема работает. Так один пример показывает точную границу её применимости. Наличие инвариантного луча не всегда означает неединственность, но при одной непрерывности оно оставляет этот вопрос открытым.

Как решать задачи и отвечать у доски

Проверить, что правая часть зависит от $\frac{y}{x}$, и указать $x \neq 0$. Найти корни $F(v) - v$, сохранить соответствующие лучи. Выбрать промежутки между корнями и границами области F. Выполнить замену $y = xv$ с полным правилом произведения, разделить переменные, интегрировать и вернуться к y. По начальному условию определить постоянную и связный интервал.

В устном доказательстве сначала нужна теорема из билета 9, затем обратимость замены. Для подобия быстрее всего проверить $\psi(x) = k\varphi(\frac{x}{k})$ непосредственным дифференцированием. После этого можно показать изменение C в неявной формуле. Завершить определением инвариантного луча и условием $F(k) = k$.

Проверка себя

1. Решите $y' = \frac{y}{x} + 1$ при $x > 0$.
2. Найдите инвариантные лучи уравнения $y' = \frac{2y}{x}$.
3. Для уравнения $y' = \frac{y}{x}$ условие $F(v) - v \neq 0$ не выполняется нигде. Следует ли отсюда неединственность?
4. Если $\varphi(2) = 3$ и $\psi(x) = 4\varphi(\frac{x}{4})$, через какую точку проходит график ψ?

Ответы. 1. $v' = \frac{1}{x}$, поэтому $y = x(\ln x + C)$. 2. Уравнение наклонов $2k = k$ даёт $k = 0$: два горизонтальных луча при обоих допустимых знаках x. 3. Нет. Общее решение $y = Cx$, и через каждую точку с $x \neq 0$ проходит единственное решение; неприменимость достаточной теоремы не является отрицательным результатом. 4. Через $(8, 12)$.

Частые ошибки

Пишут $y' = xv'$ и забывают слагаемое v; делят на $F(v) - v$ без поиска нулей; теряют $\ln|x|$ на отрицательной полуоси; считают всю прямую вместе с началом одним допустимым лучом; путают однородность нулевой степени с линейной однородностью; утверждают взаимное подобие всех кривых без учёта секторов. Перед каждым преобразованием проверяйте, обратимо ли оно в рассматриваемой области.