БИЛЕТ 9

Уравнения с разделяющимися переменными

Источники: Лекции: с. 33-39 PDF; геометрический пример и исследование границ также с. 44-48 PDF. Сборник Якуба: с. 36-42 PDF. Старый сборник: с. 17-20 PDF.

Объём ответа: Полностью доказать существование и единственность при непрерывном ненулевом множителе, зависящем от y; разобрать случаи одной переменной и интегральные кривые.

Доработка по фотографиям: вопрос 8

IMG_1963–IMG_1964; главы 9.

Что требуется. Доказать существование и единственность при ненулевом множителе; разобрать частные случаи и кривые.

Закроем пометку «дописать» на IMG_1964. Пусть $y' = f(x)g(y)$, f, g непрерывны, $g \neq 0$ на интервале J. Выберем первообразные $F' = f$, $G' = 1/g$. Тогда G' непрерывна и не обращается в нуль, значит G строго монотонна, имеет локальную дифференцируемую обратную и

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0)).$$

Формула определена для x достаточно близких к x_0, поскольку аргумент остаётся внутри $G(J)$. Дифференцирование даёт $G'(y)y' = f(x)$, то есть исходное уравнение, а при x_0 получается y_0. Любое другое решение обязано удовлетворять тому же интегральному тождеству и потому совпадает с этой функцией.

Если $g(y_*) = 0$, решение $y = y_*$ проверяется отдельно. Теорема выше в этой точке неприменима; при одной лишь непрерывности g единственность там может как быть, так и нарушаться.

Понять смысл

Уравнение

$$y' = p(x)q(y)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Зависимость правой части разбита на два множителя: один зависит только от независимой переменной, другой только от искомой функции. При $q(y) \neq 0$ можно перенести зависимость от y в левую часть и получить производную составной функции.

В учебной записи часто пишут $\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx$. Это удобное сокращение, но его строгий смысл даёт правило цепочки. Теорема существования здесь особенно интересна: для единственности достаточно непрерывности и ненулевого значения q, без требования производной q' или условия Липшица.

Точная формулировка

Пусть $p \in C(a,b)$, $q \in C(c,d)$ и

$$q(y) \neq 0 \quad \text{для всех } y \in (c,d).$$

Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$ проходит единственное локальное решение задачи Коши

$$y' = p(x)q(y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Условие ненулевого множителя относится только к q. Функция p может обращаться в нуль и менять знак. Не нужно предполагать её постоянный знак или монотонность решения $y(x)$.

Если $q(y_0) \neq 0$, но у q есть нули в других местах, теорема всё равно применима локально: по непрерывности можно выбрать меньший интервал вокруг y_0, где нулей нет. Если $q(y_0) = 0$, вывод этой теоремы неприменим, и нулевой множитель исследуется отдельно.

Доказательство через обратную функцию

Шаг 1. Построим две известные функции. Определим

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{q(v)}, \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds.$$

Обе функции непрерывно дифференцируемы, причём

$$G'(y) = \frac{1}{q(y)} \neq 0, \qquad P'(x) = p(x), \qquad G(y_0) = P(x_0) = 0.$$

Непрерывная ненулевая функция q сохраняет знак на интервале (c,d). Поэтому G' сохраняет знак, G строго монотонна и имеет обратную функцию на интервале $G((c,d))$. Обратная функция дифференцируема, поскольку G' нигде не обращается в нуль.

Шаг 2. Докажем единственность возможного решения. Если y уже является решением, то по правилу цепочки

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = \frac{p(x)q(y(x))}{q(y(x))} = p(x).$$

Интегрирование от x_0 до x даёт

$$G(y(x)) = P(x).$$

Следовательно, всякое решение с данными начальными значениями обязано удовлетворять

$$y(x) = G^{-1}(P(x)).$$

Правая часть содержит только известные функции. Значит, двух различных решений в достаточно малой общей окрестности быть не может. Этот вывод не требует монотонности самой функции y: монотонна вспомогательная функция G.

Шаг 3. Обоснуем, что формула определена. Точка $0 = G(y_0)$ лежит внутри интервала $G((c,d))$. Функция P непрерывна и $P(x_0) = 0$. Поэтому существует окрестность x_0, на которой $P(x) \in G((c,d))$. Именно на ней формула $G^{-1}(P(x))$ имеет смысл и принимает значения в (c,d). Этот небольшой шаг необходим: обратная функция не обязана быть определена для всех действительных аргументов.

Шаг 4. Проверим существование. Для построенной функции по формуле производной обратной функции получаем

$$y'(x) = (G^{-1})'(P(x))P'(x) = \frac{p(x)}{G'(y(x))} = p(x)q(y(x)).$$

Также $y(x_0) = G^{-1}(0) = y_0$. Значит, решение действительно существует. Единственность уже доказана на втором шаге. Вся теорема получена конструктивно: формула не просто описывает неизвестное решение, а создаёт его.

Как решать задачи без потери решений

1. Определить области p и q, найти корни $q(y) = 0$.
2. Для каждого допустимого корня r отдельно проверить постоянное решение $y \equiv r$.
3. На каждом интервале, где $q \neq 0$, проинтегрировать
$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx + C.$$
4. При начальном условии выбрать нужную ветвь и найти C.
5. Указать связный интервал допустимости и проверить исходное уравнение.

Постоянные решения действительно теряются при делении на q, но не каждый нуль q означает неединственность. Например, для $y' = y$ нулевое решение единственно через $y = 0$; для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$ возможны склеивания. Наличие равновесия и нарушение единственности являются разными утверждениями.

Правая часть зависит только от x

Для $y' = p(x)$, $p \in C(a, b)$ решение имеет вид

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds.$$

Оно определено на всём (a, b), а разные решения отличаются постоянной и получаются вертикальными переносами. Поле направлений имеет одинаковые наклоны вдоль каждой вертикальной прямой.

Если p имеет особенность на границе, поведение y определяется несобственным интегралом. Например, для $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ на $x > 0$ первообразная $2\sqrt{x}$ имеет конечный предел при $x \to 0+$, хотя производная неограниченна. Для $p(x) = \frac{1}{x}$ первообразная $\ln x$ уходит к $-\infty$. Сходящийся интеграл означает конечный предел, но не разрешает продолжить исходное уравнение через точку, где оно не определено.

Иногда вводят обратную зависимость $x = x(y)$ и уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p(x)}$. Это допустимо на монотонном участке при $p(x) \neq 0$. Если затем правую часть нового уравнения доопределяют в особой точке, исследуется уже новое уравнение. Его вертикальные решения и возможная неединственность не являются автоматически свойствами исходной задачи для $y(x)$.

Правая часть зависит только от y

Для автономного уравнения $y' = q(y)$ на интервале без нулей q имеем

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{q(v)}.$$

Здесь знак q определяет направление движения: решение строго возрастает при $q > 0$ и убывает при $q < 0$. Сдвиг x на постоянную сохраняет уравнение, поэтому непостоянные решения внутри одного промежутка между равновесиями являются горизонтальными сдвигами соответствующей максимальной кривой.

Пусть $q(r) = 0$, а между y_0 и r других нулей нет. Время достижения равновесия в допустимом направлении определяется интегралом $\int_{y_0}^{r} \frac{dv}{q(v)}$. Если он расходится по модулю, к равновесию можно лишь приближаться при бесконечном времени в соответствующую сторону. Если он сходится, непостоянная ветвь достигает r за конечное время. Поскольку $q(y) \to 0$, её можно состыковать с постоянным решением с нулевой производной. Такое склеивание показывает нарушение двусторонней локальной единственности в точке стыка. Нельзя делать универсальный вывод о направлении ухода, не учитывая знак q.

Например, у $q(y) = y$ интеграл $\int \frac{dy}{y}$ расходится при $y \to 0$, и ненулевые экспоненты не достигают нуля за конечное время. У $q(y) = y^{\frac{2}{3}}$ на $y > 0$ интеграл $\int_0^y v^{-\frac{2}{3}}\, dv = 3y^{\frac{1}{3}}$ конечен; возникают кубические ветви и ожидание на нуле.

Пример интегральных кривых

Рассмотрим $y' = -\frac{x}{y}$ с условием $y(0) = 2$. Область имеет две компоненты $y > 0$ и $y < 0$; выбираем верхнюю. Интегрирование даёт

$$y\,dy = -x\,dx, \qquad x^2 + y^2 = C, \qquad C = 4.$$

Из начального условия выбирается ветвь

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 < x < 2.$$

Её производная равна $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, поэтому проверка выполнена. При приближении к концам $y \to 0$, но исходная правая часть становится неопределённой. Максимальные графики всего семейства являются верхними или нижними открытыми полуокружностями, а не целыми окружностями. Полные окружности относятся к параметрическому фазовому описанию соответствующей системы.

Дополнительный пример из источников: разные границы

Для

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}\,(x-1)^3}$$

область по x разбивается точками -1 и 1 на три интервала. Решение на каждом из них задаётся определённым интегралом. Около -1 правая часть ведёт себя как $-\frac{1}{8\sqrt[3]{x+1}}$, поэтому несобственный интеграл сходится и значение y имеет конечный предел. Уравнение в -1 по-прежнему не определено.

Около 1 имеем эквивалентность $y' \sim 2^{-\frac{1}{3}}(x-1)^{-3}$, откуда

$$y(x) \sim -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}\,(x-1)^2} \quad \text{при } x \to 1 \pm .$$

В частности, $y \to -\infty$ с обеих сторон. При $x \to \pm\infty$ правая часть имеет порядок $|x|^{-\frac{10}{3}}$, поэтому соответствующие несобственные интегралы сходятся и у внешних ветвей есть конечные горизонтальные асимптоты. Для качественного ответа элементарная первообразная не нужна: достаточно сравнения степеней и контроля знаков.

Ответ у доски

Назвать форму $p(x)q(y)$ и гипотезу $q \neq 0$. Определить G и P, доказать строгую монотонность G, вывести обязательную формулу для любого решения, обосновать локальную допустимость обратной функции и проверить построенное решение. Затем разобрать два случая одной переменной, отдельно указав равновесия и возможные потерянные решения. Завершить примером полуокружности с точным интервалом.

Проверка себя

1. Решите $y' = 2xy$, $y(0) = 3$. Не потеряно ли решение при делении?
2. Применима ли доказанная теорема к $y' = 1 + \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$? Нужна ли производная правой части в нуле?
3. Найдите все постоянные решения $y' = x(y^2 - 1)$.
4. Для $y' = y^2$, $y(0) = 1$ выразите время ухода к $+\infty$ через несобственный интеграл.

Ответы. 1. $y = 3e^{x^2}$; отдельно есть $y \equiv 0$, но оно не подходит заданным данным. 2. Да: $q = 1 + \sqrt{|y|}$ непрерывна и положительна; производная в нуле не требуется. 3. $y \equiv 1$ и $y \equiv -1$. 4. $\int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} = 1$, поэтому правый конец равен 1.

Частые ошибки

Делят на q до проверки её нулей; требуют ненулевую p; необоснованно предполагают монотонность y при переменной p; забывают область обратной функции; принимают полный уровень первого интеграла за один график; переносят решения «перевёрнутого» уравнения в исходную задачу без проверки.