БИЛЕТ 8

Продолжение решений и предельное поведение

Источники: Лекции: с. 28-31 PDF. Сборник Якуба: с. 33-35 PDF. Сопоставление: старый сборник, с. 15-16 PDF.

Объём ответа: Определения продолжения и максимального решения; формулировка теоремы о предельном поведении и разбор ограниченной и неограниченной областей. Полное доказательство теоремы не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 7

IMG_1961–IMG_1962; главы 8.

Что требуется. Определения; ограниченная и неограниченная области; корректная теорема о предельном поведении.

В тетради формулировка «либо продолжается вправо, либо имеет вертикальную асимптоту» записана слишком широко. Для произвольной области верно: график максимального решения покидает каждый компакт, лежащий внутри области определения. Остановка может быть вызвана границей области при конечном значении функции.

Контрпример к чрезмерной формулировке: $y' = 0$ в $D = \{(x, y) : x < 1\}$, $y(0) = 0$. Максимальное решение $y = 0$ имеет правый конец 1, но вертикальной асимптоты нет. Для полосы $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, если максимальный правый конец $\beta < b$ конечен, действительно $|y(x)| \to \infty$ при $x \to \beta-$.

На всей плоскости $y' = y^2$, $y(0) = 1$ даёт $y = 1/(1 - x)$ на $(-\infty, 1)$; это настоящий конечный взрыв. Для $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ получаем $1/(1 + x)$ на $(-1, \infty)$: вправо решение продолжается неограниченно. Интервал всегда связный и содержит начальную точку.

Понять смысл

Локальная теорема обещает небольшой участок решения рядом с начальной точкой. Следующий вопрос: можно ли двигаться дальше, повторяя локальное построение? Если уравнение остаётся регулярным и значения решения не покидают допустимую область, оснований для остановки обычно нет.

Важно отличать границу выбранного для удобства интервала от настоящего препятствия. Функция e^x на $(-1, 1)$ решает $y' = y$, но искусственные концы -1 и 1 ничем не выделены: формулу можно продолжить. А решение $\frac{1}{1-x}$ уравнения $y' = y^2$ не удаётся продолжить через $x = 1$ как конечную непрерывную функцию. Теорема продолжения описывает возможные реальные причины остановки.

Точная формулировка определений

Пусть $y : I \to \mathbb{R}$ является решением в открытой области D, то есть $(x, y(x)) \in D$. Решение $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ называется продолжением y, если $I \subsetneq \tilde{I}$ и $\tilde{y}(x) = y(x)$ для всех $x \in I$. Продолжение вправо увеличивает правый конец интервала, продолжение влево уменьшает левый.

Решение называется максимальным, или непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни в одну сторону в той же области D для того же уравнения. Его интервал называют максимальным интервалом существования и обозначают (α, β), где возможны бесконечные концы.

Слово «максимальный» не означает «самый длинный среди всех решений». Разные начальные данные могут давать разные интервалы. При непрерывности и локальной липшицевости правой части каждое локальное решение имеет единственное максимальное продолжение. Без единственности возможны разные продолжения, так что этот вывод нельзя переносить без гипотез.

Область D является частью постановки. Для уравнения $y' = 0$ в области $D = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ решение $y \equiv 0$ максимально на $(-1, 1)$ относительно этой области. Если отдельно разрешить исходное уравнение на всей плоскости, та же функция продолжается на всю $\mathbb{R}$. Здесь изменена сама область задачи.

Теорема о выходе из компактов

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ открыта, f непрерывна в D и локально липшицева по y. Пусть y есть максимальное решение $y' = f(x, y)$ на (α, β). Тогда при приближении x к правому концу β график покидает каждый компакт $K \subset D$: для любого такого K найдётся $x_K < \beta$ такое, что

$$(x, y(x)) \notin K \quad \text{при } x_K < x < \beta.$$

Аналогичное утверждение верно при $x \to \alpha+$. Здесь компакт внутри D есть замкнутое ограниченное множество, которое целиком лежит в допустимой области, без её исключённой границы.

Это наиболее надёжная общая формулировка. Она не требует существования одного конечного предела $y(x)$ и не утверждает, что график обязательно подходит к заранее названной точке. Для непрерывной правой части соответствующий результат о максимальных продолжениях также формулируется без единственности, но наша версия согласована с используемой теорией однозначного продолжения.

Почему внутреннее конечное препятствие невозможно

Полное доказательство общей теоремы в билет не входит, но полезно понимать основной механизм. Допустим, $\beta < \infty$ и при $x \to \beta-$ существует конечный предел y_*. Если $(\beta, y_*) \in D$, то около этой точки действует локальная теорема существования. Из неё можно построить решение справа от β и присоединить к прежнему.

Непрерывность f даёт $y'(x) = f(x, y(x)) \to f(\beta, y_*)$. Поэтому склеенная функция имеет правильную производную в точке стыка; единственность согласует локальные части.

Возникло продолжение, противоречащее максимальности. Значит, конечный предел во внутренней допустимой точке не может быть причиной остановки.

Если заранее известно только, что график остаётся в одном компакте внутри D, то f на нём ограничена. Оценка

$$|y(x_2) - y(x_1)| \le M|x_2 - x_1|$$

обеспечивает существование конечного предела при конечном β. Далее применяется предыдущий аргумент. Это объяснение полезно для памяти, но общая теорема о выходе из каждого компакта сильнее одной проверки ограниченного графика.

Ограниченная и неограниченная области

Если D ограничена, уход графика из любого внутреннего компакта означает

$$\operatorname{dist}((x, y(x)), \partial D) \longrightarrow 0 \quad \text{при } x \to \beta - .$$

Чтобы понять это, зафиксируем $\varepsilon > 0$: точки области на расстоянии не меньше ε от границы образуют компакт. Решение должно со временем покинуть его. При этом не следует без дополнительных условий объявлять, что предельная точка на границе единственна.

Для полосы $D = (a, b) \times \mathbb{R}$ ситуация особенно ясна. Если правый конец максимального интервала β удовлетворяет $\beta < b$ и конечен, то

$$|y(x)| \longrightarrow +\infty \quad \text{при } x \to \beta - .$$

Иначе график возвращался бы в некоторый ограниченный прямоугольник, расположенный строго внутри полосы, что противоречит теореме. Для скалярного непрерывного решения это означает уход к $+\infty$ или $-\infty$; менять знак бесконечно часто при стремлении модуля к бесконечности невозможно из-за промежуточных нулей.

Если $\beta = b$, решение доходит до границы области по x; значение y может оставаться конечным или вести себя иначе. Если $\beta = +\infty$, конечного препятствия справа нет. Для произвольной неограниченной области удобнее сохранять формулировку через компакты: график может подходить к конечной границе, уходить в бесконечность или сочетать эти варианты.

Пример 1: конечное время взрыва

Решим $y' = y^2$, $y(0) = 1$. После разделения при $y \neq 0$ имеем

$$-\frac{1}{y} = x + C, \qquad C = -1, \qquad y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Формула допускает $x \neq 1$, но максимальный интервал задачи Коши обязан быть связным и содержать нуль. Поэтому

$$I = (-\infty, 1).$$

При $x \to 1-$ значение y стремится к $+\infty$. Правая часть y^2 гладка на всей плоскости, однако решение существует справа только до конечного момента. Это и называется взрывом за конечное время.

Та же формула на $(1, +\infty)$ задаёт другое решение уравнения, но не продолжение задачи с начальной точкой 0: объединение интервалов не является интервалом и не содержит точки, через которую надо было бы пройти непрерывно. «Перескочить» бесконечность нельзя.

Для общего условия $y(x_0) = y_0 \neq 0$ получается

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}.$$

При $y_0 > 0$ взрыв находится справа, при $y_0 < 0$ слева. При $y_0 = 0$ решение нулевое на всей прямой. Максимальный интервал зависит от начальных данных.

Пример 2: конечный предел на исключённой границе

Возьмём $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в области $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, с условием $y(1) = 1$. Получаем $y = \sqrt{x}$ на $(0, +\infty)$. При $x \to 0+$ значение стремится к нулю, но начальная правая часть в $x = 0$ не определена, а производная неограниченно растёт. Поэтому конечность значения не даёт продолжения через границу. Утверждение «ограниченное решение всегда продолжается» без слов «внутри области уравнения» неверно.

Полезное дополнение: линейный рост

Если f непрерывна и локально липшицева по y в полосе $(a, b) \times \mathbb{R}$, а

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x), \qquad A, B \geq 0, \quad A, B \in C(a, b),$$

то решение продолжается на весь интервал (a, b). На каждом компактном промежутке оценка Гронуолла ограничивает $|y|$, поэтому конечный взрыв внутри полосы исключён. В частности, линейное уравнение удовлетворяет оценке с $A = |a|$, $B = |b|$. Это дополнительный критерий; сверхлинейный рост лишь допускает взрыв, но сам по себе не доказывает его для всех начальных данных.

Ответ у доски

Определить продолжение, максимальное решение и максимальный интервал. Назвать область, в которой рассматривается продолжение. Сформулировать выход из каждого компакта, затем объяснить ограниченную область и полосу. Привести $y' = y^2$, вычислить максимальный интервал и показать конечный взрыв. Если требуется пояснение, рассказать, почему конечный предел во внутренней точке позволяет склейку.

Проверка себя

1. Найдите максимальный интервал для $y' = y^2$, $y(0) = -2$.
2. Является ли $y = e^x$ на $(0, 1)$ максимальным решением $y' = y$ в $D = \mathbb{R}^2$?
3. Решите $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$. Можно ли продолжить решение через нуль для исходного уравнения?

Ответы. 1. $y = -\frac{2}{1+2x}$, $I = (-\frac{1}{2}, +\infty)$. 2. Нет, продолжается на всю прямую. 3. $y = \ln x$ на $(0, +\infty)$; через нуль исходное уравнение не определено, а решение уходит к $-\infty$.

Частые ошибки

Не путай область правой части с интервалом решения, локальную теорему с глобальностью, ограниченность с продолжимостью. Максимальное решение задаётся на интервале. Выход из компактов не гарантирует единственного предела. Назови область и конец продолжения.