БИЛЕТ 7

Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Источники: Лекции: с. 31-32 PDF. Сборник Якуба: с. 29-32 PDF.

Объём ответа: Применить теорему Коши-Липшица к двум классам; аккуратно указать области и различить локальный и глобальный выводы. Методы решения приведены как необходимая практика.

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Теорема существования становится полезным инструментом, когда мы умеем проверить её условия для конкретной правой части. Линейное уравнение служит самым удобным примером: зависимость от y настолько проста, что единственность видна сразу, а явная формула даёт решение на всём интервале непрерывности коэффициентов.

Уравнение Бернулли внешне похоже на линейное, но степень y^γ меняет и область определения, и поведение в нуле, и возможность ухода в бесконечность за конечное время. Здесь нельзя переносить выводы линейного случая только по сходству записи. Главная проверка перед дифференцированием: где действительная степень вообще определена?

Линейное уравнение: точная формулировка

Рассмотрим

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad a, b \in C(I),$$

где I есть открытый интервал. Правая часть нормальной формы равна $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ и непрерывна в полосе $I \times \mathbb{R}$. На любом замкнутом подотрезке $J \subset I$ имеем

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |a(x)|\,|y_1 - y_2| \le L_J |y_1 - y_2|, \qquad L_J = \max_J |a|.$$

Следовательно, через каждую точку полосы проходит единственное локальное решение. Коэффициент a не обязан быть ограничен на всём I; для локального применения достаточно оценки на J.

Более сильное утверждение тоже верно: для любого $x_0 \in I$ и любого $y_0 \in \mathbb{R}$ единственное решение задачи Коши существует на всём I. Но это уже не непосредственное следствие одной локальной проверки. Обоснуем его формулой.

Вывод формулы и глобальное существование

Положим

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds, \qquad \mu(x) = e^{A(x)} > 0.$$

Тогда $\mu' = a\mu$, и после умножения уравнения на μ получаем полную производную:

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu(y' + ay) = \mu b.$$

Интегрируем от x_0 до x и учитываем $A(x_0) = 0$:

$$e^{A(x)}y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right].$$

Каждый интеграл здесь конечен для каждого $x \in I$, поскольку интегрирование идёт по компактному отрезку внутри интервала непрерывности. Значит, формула определяет решение на всём I. Дифференцирование проверяет уравнение, подстановка x_0 проверяет начальные данные.

Для единственности можно также обойтись без повторного обращения к теореме. Разность z двух решений с одинаковыми начальными данными удовлетворяет $z' + az = 0$, $z(x_0) = 0$. Поэтому $(e^A z)' = 0$, откуда $e^A z \equiv 0$ и $z \equiv 0$. Решение может расти при приближении к границе I или при $x \to \infty$, но не имеет бесконечного разрыва во внутренней точке I.

Уравнение Бернулли: область и локальная теорема

Уравнением Бернулли называется

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\gamma}, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \qquad a, b \in C(I).$$

Для произвольного действительного γ безопасная открытая область есть $D_+ = I \times (0, +\infty)$. На ней степень однозначно определяется как $y^{\gamma} = e^{\gamma \ln y}$ и

$$f(x, y) = -a(x)y + b(x)y^{\gamma}, \qquad f_y = -a(x) + \gamma b(x) y^{\gamma - 1}.$$

Обе функции непрерывны на D_+. Следовательно, в каждой точке $y_0 > 0$ имеются локальное существование и единственность. Оценка производной нужна на малом прямоугольнике, отделённом от $y = 0$, а не сразу на всей неограниченной полосе.

Отрицательные y допускаются лишь для тех степеней, для которых заранее выбрана действительная область: например, для целых показателей или подходящих рациональных показателей с нечётным знаменателем. Нельзя объявлять всю $I \times \mathbb{R}$ областью уравнения при произвольном действительном γ.

Что происходит при нуле.

- Если $\gamma > 1$ и действительная степенная функция определена в двусторонней окрестности нуля, то её производная непрерывно продолжается в нуль значением 0. Правая часть локально липшицева, и $y \equiv 0$ является единственным решением через нулевое начальное значение. Для произвольного $\gamma > 1$ на полуоси $y \geq 0$ тот же вывод для неотрицательных решений можно получить, продолжив степень как $(\max\{y, 0\})^\gamma$ на всю прямую и применив стандартную теорему. Это явно названное вспомогательное продолжение, а не определение исходной степени при отрицательных y.
- Если $0 < \gamma < 1$, значение $0^\gamma = 0$ определено, но липшицевость около нуля обычно нарушается при ненулевом b. Возможна неединственность, которую нужно доказывать отдельно. Она не следует из одного диапазона γ: при $b \equiv 0$ уравнение становится линейным и единственность сохраняется.
- Если $\gamma < 0$, степень при $y = 0$ не определена. Нулевую прямую надо исключить из исходной области. Нельзя объявить $y \equiv 0$ решением подстановкой в неопределённое выражение.

При $\gamma > 1$ производная обычно не ограничена при $|y| \to \infty$; корректно говорить о локальной, а не обязательно глобальной липшицевости.

Как решать уравнение Бернулли

На участке, где выбранная ветвь степени гладка и $y \neq 0$, делим уравнение на y^γ и вводим

$$z = y^{1-\gamma}, \qquad z' = (1-\gamma)y^{-\gamma}y'.$$

Получаем линейное уравнение

$$z' + (1-\gamma)a(x)z = (1-\gamma)b(x).$$

Сначала решаем его, затем выполняем обратную замену. При работе в $y > 0$ необходимо сохранить $z > 0$, поскольку $y^{1-\gamma}$ положительно. Формальная линейная функция z, перешедшая через нуль или ставшая отрицательной, не всегда даёт допустимое продолжение исходного решения.

Алгоритм поэтому таков: указать область степени; отдельно проверить нулевое решение, если оно допустимо; выполнить замену для ненулевых решений; применить начальное условие; выбрать связный интервал, где обратная замена корректна; проверить исходное уравнение. Интервал линейного уравнения для z может оказаться больше интервала исходного y.

Пример: локальная единственность и конечный взрыв

Решим

$$y' + y = y^2, \qquad y(0) = 2.$$

Здесь $f = y^2 - y$ гладка на всей плоскости, поэтому локальная единственность гарантирована. Для $y \neq 0$ положим $z = \frac{1}{y}$. Умножая исходное уравнение на $-y^{-2}$, получаем

$$z' - z = -1.$$

Общее решение есть $z = 1 + Ce^x$. Из $z(0) = \frac{1}{2}$ следует $C = -\frac{1}{2}$, поэтому

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{e^x}{2}}, \qquad -\infty < x < \ln 2.$$

Начальная точка лежит именно в этом связном интервале. При $x \to \ln 2-$ значение y стремится к $+\infty$, хотя правая часть исходного уравнения определена везде. Таким образом, гладкость и локальная единственность не гарантируют глобального существования.

Проверка даёт

$$y' = \frac{\frac{e^x}{2}}{(1 - \frac{e^x}{2})^2}, \qquad y^2 - y = \frac{\frac{e^x}{2}}{(1 - \frac{e^x}{2})^2}.$$

Ненулевое семейство $y = \frac{1}{1+Ce^x}$ включает стационарное решение $y \equiv 1$ при $C = 0$. Решение $y \equiv 0$ не получилось после деления, поэтому его дописывают отдельно. Для заданного значения 2 оно, разумеется, не подходит.

Почему одного значения коэффициента недостаточно

При $0 < \gamma < 1$ равенство $b(x_0) = 0$ само по себе не возвращает единственность: теорема проверяется в целой окрестности, а не в одной точке. Рассмотрим уравнение

$$y' = x\sqrt{y}, \qquad y \geq 0, \qquad y(0) = 0.$$

В начальной точке коэффициент перед корнем равен нулю. Тем не менее кроме нулевого решения существует

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^4}{16}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Для $x > 0$ производная равна $\frac{x^3}{4}$, а $x\sqrt{y} = x \cdot \frac{x^2}{4}$ даёт то же выражение. При $x < 0$ обе части нулевые; в нуле обе односторонние производные равны нулю. Получены два разных дифференцируемых решения.

С другой стороны, если b тождественно равно нулю в окрестности, уравнение там линейное и единственность есть. Таким образом, проверять надо поведение коэффициента поблизости и реальные решения, а не только показатель степени или значение коэффициента в начальной точке. Этот пример также напоминает, что полуплоскость $y \geq 0$ требует аккуратного обращения с граничными начальными значениями.

Ответ у доски

Выписать линейное уравнение и оценку Липшица через max $|a|$ на компактном подотрезке. Разделить локальный вывод теоремы и глобальный вывод явной формулы. Затем записать Бернулли, сначала оговорив область действительной степени. Вычислить f_y, объяснить поведение вдали от нуля и три случая у нуля. Завершить заменой $z = y^{1-\gamma}$ и напоминанием о потерянных нулевых решениях.

Проверка себя

1. Решите $y' + 2y = 4$, $y(0) = 1$ и укажите интервал существования.

2. Какое линейное уравнение получается из $y' + xy = y^3$ после замены $z = y^{-2}$?
3. Верно ли, что при $0 < \gamma < 1$ любое уравнение Бернулли имеет несколько решений через $y = 0$? Приведите контрпример.
4. Для $y' + y = y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ найдите решение и проверьте наличие конечного взрыва.

Ответы. 1. $y = 2 - e^{-2x}$ на всей $\mathbb{R}$. 2. $z' - 2xz = -2$ на участке $y \neq 0$. 3. Нет: при $b \equiv 0$ получаем линейное уравнение; например, $y' + y = 0$ имеет единственное нулевое решение через нуль. 4. $y = \frac{1}{1+e^x}$ на всей $\mathbb{R}$; конечного взрыва нет.

Частые ошибки

Применяют дробную степень ко всем отрицательным значениям; считают локальную оценку глобальной; делают глобальный вывод из локальной теоремы; забывают знак $1 - \gamma$ в замене; теряют нулевое решение; считают отказ условия Липшица доказательством неединственности. При проверке области задайте себе три вопроса: определена ли степень, обратима ли замена, не обращается ли знаменатель в нуль?