БИЛЕТ 6

Теорема Пеано и роль непрерывности

Источники: Лекции: с. 21-24 PDF. Сборник Якуба: с. 26-28 PDF. Старый сборник: с. 14 PDF.

Объём ответа: Сформулировать теорему без доказательства; обосновать примеры, показывающие достаточность, существенность и необязательность непрерывности.

Доработка по фотографиям: вопрос 6

IMG_1960; главы 6.

Что требуется. Формулировка без доказательства; непрерывность достаточна, но не необходима; при разрыве существование может нарушиться.

Теорема Пеано даёт локальное существование при непрерывной правой части, не обещая единственности. Три утверждения нельзя смешивать: непрерывность гарантирует существование; без неё общей гарантии нет; отдельное уравнение с разрывной правой частью всё же может иметь решение.

Для $y' = \operatorname{sgn} x$, $y(0) = 0$ непрерывный кандидат равен $|x|$, но его односторонние производные в нуле различны. Дифференцируемого решения на двустороннем интервале нет. Для начального значения 1 из тетради кандидат равен $1 + |x|$; вывод тот же.

Пример из тетради $y = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$, $y(0) = 0$, имеет $y'(0) = 0$ по определению, а вне нуля $y' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Производная разрывна. Если в определении решения требуется C^1, используем бесспорный пример $f(x, 0) = 0$, $f(x, y) = 1$ при $y \neq 0$: правая часть разрывна на оси, а $y = 0$ является гладким решением.

Понять смысл

Существование и единственность нельзя объединять в одно неразделимое свойство. Для существования локального решения достаточно непрерывности правой части. Для гарантированной единственности нужны дополнительные ограничения, например условие Липшица. Теорема Пеано отвечает именно на вопрос «существует ли хотя бы одно решение?».

Фраза «непрерывность существенна, но не необходима» не противоречива. Существенна означает, что нельзя просто вычеркнуть её из общей теоремы и сохранить гарантию для всех правых частей. Не необходима означает, что отдельные уравнения с разрывной правой частью всё же могут иметь решения. Для понимания нужны два разных примера: один с отсутствием решения, другой с существованием.

Точная формулировка

Локальная теорема Пеано. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ открыта и $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует $h > 0$ и хотя бы одно решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

определённое при $|x - x_0| < h$ и имеющее график в D. При этих условиях решение принадлежит C^1, поскольку $y' = f(x, y(x))$ непрерывна.

Есть количественная прямоугольная версия. Если f непрерывна на

$$R = \{|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\},$$

то с $M = \max_R |f|$ можно гарантировать существование на $|x - x_0| \le \min(a, \frac{b}{M})$; при $M = 0$ выбирают $h = a$. В отличие от Коши-Липшица, здесь не требуется оценка разностей по y и не утверждается единственность.

Теорема локальна. Она не утверждает, что решение определено для всех x, что его можно выразить элементарными функциями или что произвольные последовательные приближения Пикара обязательно дадут нужный результат. Для существования по Пеано используются иные общие аргументы, например компактность приближённых решений; их полное доказательство в данном билете не требуется.

Непрерывность даёт существование, но не единственность

У функции $f(y) = |y|^{\frac{2}{3}}$ нет разрыва в нуле. Поэтому Пеано гарантирует решение задачи $y(0) = 0$. Но нулевое решение и функция $y = \frac{x^3}{27}$ удовлетворяют одному уравнению:

$$\left(\frac{x^3}{27}\right)' = \frac{x^2}{9} = \left|\frac{x^3}{27}\right|^{\frac{2}{3}}.$$

Они различны и проходят через $(0, 0)$. Более того, возможны решения с ожиданием из билета 4. Пример показывает ровно то, что требуется: непрерывность совместима с неединственностью. Он не опровергает Пеано, поскольку единственность в заключение теоремы не входила.

Разрывная правая часть: решения может не быть

Определим правую часть во всех точках, включая нуль:

$$f(x, y) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим $y' = \operatorname{sgn} x$, $y(0) = 0$. Предположим, что решение дифференцируемо на двустороннем интервале вокруг нуля. При $x > 0$ его производная равна 1, поэтому $y = x + C_+$. Непрерывность в нуле и начальное условие дают $C_+ = 0$. При $x < 0$ аналогично $y = -x + C_-$ и $C_- = 0$. Единственный возможный непрерывный кандидат имеет вид $y = |x|$.

Но его разностные отношения в нуле равны

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=-1.$$

Производной нет. Получено противоречие; классического дифференцируемого решения на интервале вокруг нуля не существует. Значение $f(0,y)=0$ делает постановку определённой, но не устраняет излом. Даже если выбрать другое значение в нуле, различные односторонние наклоны останутся.

Равенство $|x|=\int_0^x \operatorname{sgn} s\,ds$ здесь верно, однако из него нельзя получить дифференцируемость в нуле по той теореме, которую мы использовали в билете 5: подынтегральная функция в нуле разрывна. В теории обобщённых решений такой объект полезен, но это другой класс решений, который надо явно назвать.

Разрывная правая часть: решение всё же может быть

Сначала рассмотрим пример, остающийся корректным даже при требовании C^1-гладкости решения:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & y=0,\\ 1, & y\neq 0.\end{cases}$$

Функция разрывна в каждой точке оси $y=0$. Тем не менее $y(x)\equiv 0$ решает задачу $y'=f(x,y)$, $y(0)=0$: обе части уравнения равны нулю при всех x. Уравнение использует правую часть только вдоль графика решения; плохое поведение в соседних точках не исключает существования этого графика.

Теперь разберём пример из сборника, где решение дифференцируемо, но его производная не непрерывна:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Для $x\neq 0$ правило произведения даёт

$$\varphi'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}).$$

В нуле производную нужно вычислять по определению:

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{h})}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin(\frac{1}{h})=0.$$

Следовательно, если положить

$$f(x,y)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

то φ решает задачу $y'=f(x,y)$, $y(0)=0$ в смысле существования производной и поточечного выполнения уравнения.

При этом f не непрерывна в нуле. Вдоль $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ её значения равны -1, а вдоль $\tilde{x}_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ равны 1. Обе последовательности стремятся к нулю, но значения имеют разные пределы. Поэтому $\varphi\notin C^1$ около нуля. Если преподаватель определяет классическое решение только

как функцию класса C^1, для утверждения о необязательности непрерывности лучше использовать первый пример с нулевым решением, а для этого примера явно сказать «дифференцируемое решение». Суть утверждения от соглашения о терминологии не меняется.

Как рассуждать в задаче

Если f непрерывна около начальной точки, сразу можно заключить локальное существование. Затем вопрос единственности рассматривается отдельно. Если f разрывна, нельзя заключать ни наличие, ни отсутствие решения без дополнительного исследования: пробуют найти конкретную функцию, анализируют производную на разных частях области и проверяют стыки.

Особенно полезно сравнивать три уровня результата. Непрерывность даёт хотя бы одно решение. Непрерывность вместе с локальным условием Липшица даёт единственное локальное решение. Явная формула или теорема продолжения могут дополнительно дать весь максимальный интервал. Ни один следующий уровень не следует автоматически из предыдущего.

Что именно доказывает контрпример

Если одна предложенная функция не подошла, это ещё не доказательство отсутствия решений: могла не подойти только догадка. В примере со знаком мы сначала вывели все возможные формы на двух полуинтервалах, затем использовали обязательную непрерывность и получили единственного возможного кандидата. Лишь после этого отсутствие его производной исключило любой ответ.

Тот же аргумент работает для правой части, равной постоянной a слева от нуля и другой постоянной b справа. Любое непрерывное решение с начальным значением y_0 обязано совпадать с $y_0 + ax$ слева и $y_0 + bx$ справа. Если $a \neq b$, производные не согласуются. Если $a = b$, остаётся проверить значение правой части непосредственно в нуле: оно тоже должно равняться этой общей производной. Таким образом, даже изменение функции в одной точке может влиять на существование поточечного классического решения, хотя определённый интеграл такого изменения не замечает.

Ответ у доски

Сформулировать Пеано, назвав открытую область, непрерывность, произвольную начальную точку и локальное существование. Явно сказать, чего теорема не утверждает. Показать непрерывный пример с неединственностью. Затем доказать невозможность решения для $\operatorname{sgn} x$ и предъявить разрывную правую часть с существующим решением. При использовании осциллирующего примера отдельно вычислить производную в нуле, а не подставлять нуль в формулу для $x \neq 0$.

Проверка себя

1. Что гарантирует Пеано для $y' = \sqrt{|y|} + x^2$, $y(0) = 0$? Можно ли по этой теореме сказать, сколько решений?
2. Является ли $y = |x|$ решением $y' = \operatorname{sgn} x$ на $(0, 1)$? На $(-1, 1)$?
3. Для $f(x, y) = 0$ при $y = 0$ и $f(x, y) = 1$ при $y \neq 0$ проверьте решение $y \equiv 0$. Почему это не противоречит теореме Пеано?

Ответы. 1. Хотя бы одно локальное решение; единственность не следует. 2. На $(0, 1)$ да; на $(-1, 1)$ нет, поскольку производная в нуле не существует. 3. Обе части равны нулю. Пеано даёт достаточное, а не необходимое условие существования.

Частые ошибки

Пеано не даёт единственности. Непрерывность достаточна, но не необходима для существования. В контрпримере правая часть определена в начальной точке. Различай дифференцируемость и C^1.