**БИЛЕТ 5**

# Интегральное уравнение и метод Пикара

Источники: Лекции: с. 24-27 PDF. Сборник Якуба: с. 21-25 PDF. Старый сборник: с. 12-13 PDF.

Объём ответа: Полностью доказать эквивалентность; описать последовательные приближения и вычислить пример. Полное доказательство теоремы Пикара не обязательно.

## Доработка по фотографиям: вопрос 5

IMG_1958–IMG_1959; главы 5.

**Что требуется.** Доказать обе стороны эквивалентности; построить последовательные приближения.

Из $y' = f(x, y)$ и $y(x_0) = y_0$ интегрированием получаем $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$. Обратно: если $y$ непрерывна и удовлетворяет этому равенству, непрерывность $f(s, y(s))$ позволяет продифференцировать интеграл; затем подстановка $x = x_0$ восстанавливает начальное условие.

Пикар заменяет неизвестное под интегралом предыдущим приближением:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \qquad y^{[m+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{[m]}(s))\, ds.$$

Квадратные скобки обозначают номер приближения, не производную. Для $y' = y$, $y(0) = 1$ получаем $1$, $1 + x$, $1 + x + x^2/2$, затем $1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Предел — $e^x$.

На отрезке сжатия $Lh < 1$ для оператора $T$ имеем $\|Tu - Tv\|_\infty \le Lh\|u - v\|_\infty$. Это объясняет сходимость, но ограничение $Lh < 1$ относится к данному доказательству: само решение может существовать намного дальше.

## Понять смысл

Производная сообщает, как функция меняется сейчас; интеграл складывает эти изменения от начальной точки до текущей. Поэтому задача Коши должна быть равносильна утверждению «текущее значение равно начальному плюс накопленное изменение»:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Неизвестная функция стоит и слева, и под знаком интеграла. Это не готовая формула через известные величины, но удобная форма для построения решения: под интеграл можно подставлять последовательные приближения.

Здесь $s$ есть переменная интегрирования, а $x$ есть свободная переменная и верхний предел. Нельзя заменять верхний предел на $y$: это изменило бы уравнение. Также нельзя писать под интегралом $f(s, y(x))$ вместо $f(s, y(s))$: правая часть должна вычисляться вдоль всей искомой кривой.

## Точная формулировка эквивалентности

Пусть $f$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in I$, а график функции $y : I \to \mathbb{R}$ лежит в $D$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $y$ дифференцируема на $I$ и удовлетворяет задаче Коши
$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0;$$
2. $y$ непрерывна на $I$ и для каждого $x \in I$ выполнено
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

На бесконечном или открытом интервале каждый конкретный интеграл берётся по конечному отрезку между $x_0$ и $x$, лежащему в $I$. Если $x < x_0$, используется обычное правило изменения ориентации интеграла. Условие Липшица для этой эквивалентности не требуется.

## Доказательство

**Из задачи Коши в интегральное уравнение.** Пусть $y$ решает задачу Коши. Дифференцируемая функция непрерывна. Композиция $s \mapsto f(s, y(s))$ непрерывна, поскольку непрерывны $f$ и отображение $s \mapsto (s, y(s))$. По уравнению $y'$ совпадает с этой непрерывной функцией. Таким образом, применима формула Ньютона-Лейбница:
$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\, ds = y(x) - y(x_0).$$
Интегрируя равенство $y'(s) = f(s, y(s))$ и используя $y(x_0) = y_0$, получаем
$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$
Это нужное интегральное уравнение. Начальное условие здесь не исчезло, а превратилось в постоянное слагаемое $y_0$.

**Из интегрального уравнения в задачу Коши.** Теперь предполагаем только непрерывность $y$ и выполнение интегрального равенства. Композиция $g(s) = f(s, y(s))$ непрерывна. Поэтому функция
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$
дифференцируема и $G'(x) = g(x)$ по основной теореме анализа. Из равенства $y = y_0 + G$ получаем уже не предполагаемую, а доказанную дифференцируемость $y$ и
$$y'(x) = G'(x) = f(x, y(x)).$$
Наконец, подставим $x = x_0$:
$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\, ds = y_0.$$
Проверены и уравнение, и начальное условие. Обе импликации доказаны.

Ключевой шаг обратного направления часто пропускают: производную нельзя просто взять у произвольной непрерывной функции. Здесь право на дифференцирование даёт её равенство интегралу от непрерывной функции.

## Метод последовательных приближений

Введём обозначение $y^{[n]}$ для номера приближения, чтобы не путать нулевое приближение с числом $y_0$. Схема Пикара имеет вид

$$y^{[0]}(x) = y_0, \qquad y^{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{[n]}(s))\, ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

На каждом шаге под интегралом стоит уже известная функция. Все приближения удовлетворяют начальному условию, поскольку интеграл от $x_0$ до $x_0$ равен нулю. Однако отдельное приближение обычно ещё не удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению: его производная равна $f(x, y^{[n-1]}(x))$, а не $f(x, y^{[n]}(x))$.

При условиях Коши-Липшица в прямоугольнике $R$ эти приближения определены на гарантированном отрезке $|x - x_0| \le h$ и равномерно сходятся к единственному решению. Ограничение $Mh \le b$ удерживает каждый следующий график внутри прямоугольника. Равномерная сходимость важна: она позволяет контролировать ошибку сразу на всём отрезке, а не только в одной точке.

## Почему сходимость правдоподобна: полезная оценка

Следующая оценка объясняет механизм метода; она не заменяет обязательное доказательство эквивалентности, приведённое выше. Из схемы и липшицевости получается

$$|y^{[1]}(x) - y^{[0]}(x)| \le M|x - x_0|,$$

а затем по индукции

$$|y^{[n+1]}(x) - y^{[n]}(x)| \le \frac{ML^n|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Действительно, очередная разность оценивается интегралом от $L$ предыдущей разности; интегрирование степени добавляет следующий делитель. Сумма этих оценок на $|x - x_0| \le h$ сходится благодаря факториалу. Поэтому последовательность равномерно сходится, а липшицева оценка позволяет перейти к пределу под интегралом. Полученный предел решает интегральное уравнение, значит, и задачу Коши.

Этот аргумент показывает, почему не нужно требовать $Lh < 1$ для приведённой факториальной оценки: многократное интегрирование даёт более сильное затухание, чем одна геометрическая оценка. Если объяснение сходимости не запрошено, на экзамене достаточно сформулировать результат и уверенно выполнить несколько итераций.

## Пример из билета: экспонента

Рассмотрим $y' = y$, $y(0) = 1$. Интегральное уравнение и приближения имеют вид

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s)\, ds, \qquad y^{[n+1]}(x) = 1 + \int_0^x y^{[n]}(s)\, ds.$$

Вычисляем последовательно:

$$y^{[0]}(x) = 1,$$
$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x 1\,ds = 1 + x,$$
$$y^{[2]}(x) = 1 + \int_0^x (1+s)\,ds = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
$$y^{[3]}(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

По индукции

$$y^{[n]}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$$

Если формула верна для $n$, интегрирование каждого слагаемого даёт $\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}$, поэтому она верна и для $n+1$. Предел есть $e^x$. На любом фиксированном отрезке $|x| \le r$ остаток ряда оценивается, например, так:

$$|e^x - y^{[n]}(x)| \le e^r \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Итоговая проверка: $(e^x)' = e^x$ и $e^0 = 1$. Приближение $1 + x$ точно совпадает с решением в начале и имеет правильный начальный наклон, но не является точным решением на целом интервале.

## Что метод не обещает без гипотез

Для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ нулевое начальное приближение даёт $y^{[n]} \equiv 0$ на каждом шаге. Оно сходится к одному решению, хотя задача имеет и другие решения. Поэтому факт успешной работы конкретной последовательности не доказывает единственность. Эквивалентность задач остаётся верной, а теорема о единственном пределе для задачи требует своих условий.

## Пример с явной зависимостью от независимой переменной

Для задачи $y' = x + y$, $y(0) = 1$ получаем

$$y^{[n+1]}(x) = 1 + \int_0^x (s + y^{[n]}(s))\,ds.$$

Нулевое приближение здесь равно $1$, а не $0$. Первые шаги:

$$y^{[1]} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad y^{[2]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6},$$

$$y^{[3]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$$

Каждый раз явное слагаемое $s$ добавляется заново. Нельзя интегрировать лишь предыдущее приближение и забывать исходную зависимость от $x$.

Точное решение можно независимо найти линейным методом: $y' - y = x$ даёт $y = Ce^x - x - 1$, а условие $y(0) = 1$ даёт $C = 2$. Поэтому $y = 2e^x - x - 1$. Его разложение начинается как $1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots$. Сравнение показывает, что коэффициенты приближений постепенно

уточняются. При этом третье приближение не совпадает со всем многочленом Тейлора четвёртой степени: коэффициент при $x^4$ ещё равен $\frac{1}{24}$ вместо $\frac{1}{12}$. Метод Пикара не следует без проверки отождествлять с простым выписыванием ряда Тейлора. Совпадение в примере экспоненты было особым удобным случаем.

## Ответ у доски

Выписать задачу Коши и равносильное интегральное уравнение. В прямом направлении интегрировать и использовать начальное условие. В обратном обосновать непрерывность подынтегральной функции, затем дифференцируемость интеграла и проверку начального условия. После этого записать рекурсию Пикара, её условия сходимости и три первых шага для $y' = y$. Не смешивать доказательство эквивалентности с отдельной теорией сходимости.

## Проверка себя

1. Запишите интегральное уравнение для $y' = x + y^2$, $y(2) = 3$.
2. Найдите $y^{[1]}$ и $y^{[2]}$ для $y' = x + y$, $y(0) = 1$, начиная с постоянной $1$.
3. Почему из непрерывности $y$ в обратном направлении можно получить существование $y'$?

**Ответы.** 1. $y(x) = 3 + \int_2^x (s + y(s)^2)\,ds$. 2. $y^{[1]} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $y^{[2]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$. 3. Интегральное равенство представляет $y$ как константу плюс интеграл с переменным пределом от непрерывной функции.

## Частые ошибки

Ставят неверный верхний предел; забывают $y_0$; подставляют в рекурсию неизвестное точное решение; не проверяют начальное условие в обратной импликации; считают конечную итерацию точным ответом; требуют Липшица для самой эквивалентности. Проверяйте каждый индекс и различайте число $y_0$ и функцию $y^{[0]}$.