БИЛЕТ 4

Задача Коши и теорема Коши-Липшица

Источники: Лекции: с. 14-21 PDF. Сборник Якуба: с. 17-20 PDF. Старый сборник: с. 10-11 PDF.

Объём ответа: Сформулировать теорему; доказать достаточность ограниченной производной для условия Липшица; показать, что условие Липшица слабее. Полное доказательство теоремы существования не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 4

IMG_1954–IMG_1957; главы 4.

Что требуется. Задача Коши; теорема; достаточные условия Липшица с доказательством; два разных контрпримера.

На прямоугольнике $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ непрерывность f даёт $M = \max|f|$. При условии Липшица по y с одной общей константой L решение задачи Коши существует и единственно на $|x - x_0| \le h$, где $h = \min(a, b/M)$; при $M = 0$ берём $h = a$.

Если f_y существует и $|f_y| \le L$ на прямоугольнике, теорема Лагранжа по переменной y даёт

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f_y(x, \eta)|\,|y_2 - y_1| \le L|y_2 - y_1|.$$

Непрерывность f_y на компакте — удобное достаточное условие её ограниченности. Обратное неверно: $f = |y|$ липшицева с $L = 1$, хотя производной в нуле нет.

Для отсутствия единственности используем другой пример: $y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$. И $y = 0$, и $y = x^3$ решают задачу. Можно также взять $y_a = 0$ при $x \le a$ и $(x - a)^3$ при $x > a$, $a \ge 0$. В точке склейки производная равна нулю. Отсутствие f_y само по себе ещё ничего не доказывает; нужны действительно разные решения.

Понять смысл

Уравнение задаёт закон изменения, а начальное условие выбирает точку, через которую должен пройти график. Два вопроса принципиально различаются: существует ли такой график и может ли их быть несколько? Теорема Коши-Липшица даёт удобные достаточные условия положительного ответа на первый вопрос и отрицательного на второй.

Например, задача $y' = y$, $y(0) = 1$ имеет решение e^x. Но умение угадать эту функцию не объясняет, почему другого решения нет. Напротив, для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ нулевая функция является решением, однако не единственным. У обоих уравнений правая часть непрерывна. Значит, одной непрерывности для единственности недостаточно.

Точная формулировка

Задача Коши. Для уравнения $y' = f(x, y)$ задача Коши состоит в нахождении решения на интервале, содержащем x_0, которое удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$. Начальная точка

(x_0, y_0) должна принадлежать области определения правой части.

Условие Липшица по зависимой переменной. Рассмотрим прямоугольник

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}, \qquad a, b > 0.$$

Функция f удовлетворяет в нём условию Липшица по y, равномерно по x, если существует одно число $L \ge 0$ такое, что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

для всех допустимых x, y_1, y_2. Порядок кванторов существенен:

$$\exists L \ge 0 \quad \forall x \quad \forall y_1, y_2.$$

Разрешить выбирать новое L для каждой пары означало бы почти лишить условие содержания. Также сравниваются значения при одном и том же x: условие относится к y, а не обязательно к двум переменным одновременно.

Теорема Коши-Липшица. Пусть f непрерывна на R и удовлетворяет там условию Липшица по y. Обозначим

$$M = \max_R |f|, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

при $M > 0$; при $M = 0$ положим $h = a$. Тогда задача Коши имеет решение при $|x - x_0| \le h$, график которого лежит в R, и это решение единственно среди решений задачи, остающихся в R. На концах отрезка производные понимаются односторонне; обычное двустороннее утверждение относится к его внутренности.

Удобная локальная версия: если f непрерывна в открытой области D и локально липшицева по y, равномерно по x в достаточно малых прямоугольниках, то через каждую точку D проходит единственное локальное решение. Совпадение решений с одинаковыми начальными данными продолжается на их общем интервале определения.

Число h есть гарантированный, а не обязательно максимальный размер интервала. Оценка $|y'| \le M$ даёт $|y(x) - y_0| \le M|x - x_0|$, поэтому за время h решение не успевает выйти за горизонтальные стороны прямоугольника. Полный интервал существования иногда намного больше.

Доказательство достаточного условия Липшица

Предположим, что для каждого фиксированного x функция $y \mapsto f(x, y)$ непрерывна на соответствующем отрезке, дифференцируема внутри него и

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le L$$

с одним и тем же L для всех рассматриваемых x, y. Возьмём любые $y_1 \ne y_2$. По теореме Лагранжа о среднем существует ξ между ними, для которого

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2).$$

Поскольку весь вертикальный отрезок между точками лежит в прямоугольнике, оценка производной применима в точке (x, ξ). Следовательно,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)|\,|y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|.$$

При $y_1 = y_2$ неравенство очевидно. Условие Липшица доказано.

В частности, если f_y непрерывна в окрестности начальной точки, то на достаточно малом замкнутом прямоугольнике она ограничена по теореме Вейерштрасса. Это даёт локальную липшицевость. Непрерывность производной на неограниченной области сама по себе не даёт единой глобальной границы: например, для $f = y^2$ производная $2y$ не ограничена на всей плоскости.

Почему условие Липшица слабее

Возьмём $f(x, y) = |y|$. Обратное неравенство треугольника даёт

$$\big||y_1| - |y_2|\big| \le |y_1 - y_2|.$$

Поэтому $L = 1$ подходит на всей плоскости. Между тем производная по y в нуле не существует: правое разностное отношение равно 1, левое равно -1. Значит, липшицевость не требует существования ограниченной производной в каждой точке. Слова «слабее» здесь означают точное логическое отношение: условие на производную влечёт Липшиц, а обратное утверждение неверно.

Есть и другое важное различие. Невыполнение условия Липшица не доказывает неединственность. Оно означает лишь, что эта достаточная теорема не даёт ответа. Например, непрерывная функция $1 + \sqrt{|y|}$ не липшицева в нуле, но нигде не обращается в нуль. Для автономного уравнения $y' = 1 + \sqrt{|y|}$ локальная единственность следует из обратимости интеграла $\int \frac{du}{1+\sqrt{|u|}}$; это доказательство разберём в билете 9.

Пример: как действительно доказать неединственность

Для задачи

$$y' = |y|^{\frac{2}{3}}, \qquad y(0) = 0$$

неравенство Липшица с $y_2 = 0$ потребовало бы

$$|y|^{\frac{2}{3}} \le L|y|, \qquad |y|^{-\frac{1}{3}} \le L \quad (y \neq 0),$$

что невозможно при $y \to 0$. Теперь требуется самостоятельное доказательство неединственности, то есть предъявление разных решений.

Нулевая функция подходит. Кроме того, для каждого $c \ge 0$ подходит функция ожидания

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le c, \\ \dfrac{(x-c)^3}{27}, & x \ge c. \end{cases}$$

При $x < c$ обе части уравнения нулевые. При $x > c$ производная равна $\frac{(x-c)^2}{9}$, и правая часть имеет то же значение. В точке склейки функция и производная совпадают с нулём с обеих сторон. Все эти решения удовлетворяют начальному условию и различаются после соответствующего времени ожидания. Имеется бесконечно много решений, а кривая $\frac{x^3}{27}$ является кубической, не параболой.

Как применять теорему

Для $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$ возьмём $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. На нём $|f| \le 2$, а $|f_y| = |2y| \le 2$. Значит, можно взять $M = 2$, $L = 2$, $h = \frac{1}{2}$. Получена гарантия единственного решения хотя бы при $|x| \le \frac{1}{2}$. Ни формула решения, ни максимальный интервал пока не найдены, и теорема этого не обещает.

Общий алгоритм: проверить начальную точку; выбрать прямоугольник внутри области; проверить непрерывность; найти липшицеву оценку или ограниченную производную; сформулировать именно локальный вывод. Если требуется весь интервал, нужен отдельный аргумент продолжения или явная формула.

Пример без производной правой части в нуле

Решим $y' = |y|$, $y(x_0) = y_0$. Если $y_0 > 0$, кандидат $y = y_0 e^{x - x_0}$ остаётся положительным и удовлетворяет $y' = y = |y|$. Если $y_0 < 0$, кандидат $y = y_0 e^{-(x - x_0)}$ остаётся отрицательным и удовлетворяет $y' = -y = |y|$. При $y_0 = 0$ подходит $y \equiv 0$. Получились решения для любых начальных данных на всей прямой.

Почему через нуль нельзя присоединить ненулевую экспоненту после ожидания? Для этого уравнения действует глобальная липшицева оценка с $L = 1$, поэтому единственность исключает такое присоединение. Даже без теоремы ненулевая экспонента не достигает нуля в конечной точке. Этот пример полезно сопоставить с кубической ветвью $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$: обе правые части непрерывны, но лишь первая достаточно контролирует разности значений около нуля. Отсутствие производной самой функции $|y|$ в одной точке этому контролю не мешает.

Ответ у доски

Определить задачу Коши. Записать прямоугольник и условие Липшица с одним L. Сформулировать теорему, пояснить M и h. Доказать достаточность ограниченной производной через теорему Лагранжа. Привести $|y|$ как пример липшицевой недифференцируемой функции. В завершение показать две разные функции для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$ и подчеркнуть, что неединственность подтверждена подстановкой, а не одним отказом условия теоремы.

Проверка себя

1. Найдите константу Липшица для $f(x, y) = \sin x + 3y$ на всей плоскости.
2. Выполняются ли условия локальной теоремы для $y' = y^2$ в точке $(0, 100)$? Следует ли отсюда существование на всей $\mathbb{R}$?
3. Почему $f(y) = \sqrt{|y|}$ не липшицева около нуля? Доказывает ли это само по себе неединственность?

Ответы. 1. $L = 3$. 2. Да, поскольку $2y$ ограничена на любом малом прямоугольнике; глобальный вывод не следует. 3. Отношение $\frac{|f(y) - f(0)|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$ неограниченно; нет, нужны отдельные решения или другой аргумент.

Частые ошибки

Меняют местами кванторы; проверяют липшицевость по неправильной переменной; забывают модуль у $y_1 - y_2$; считают локально ограниченную производную глобально ограниченной; из неприменимости теоремы делают вывод об отсутствии или неединственности решения. Правильная последняя фраза при отказе гипотез: «Эта теорема вопрос не решает; исследуем отдельно».