БИЛЕТ 3

Физические задачи, приводящие к ОДУ

Источники: Лекции: с. 12-14 PDF (колебания и распад). Сборник Якуба: с. 14-16 PDF; охлаждение Ньютона добавлено в сборнике на с. 16.

Объём ответа: Поставить физические задачи, получить уравнения и решить их; отдельная абстрактная теорема не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 3

IMG_1953; главы 3.

Что требуется. Смысл переменных, вывод уравнения и решение трёх моделей.

В тетради выбраны три модели. Для движения $S' = V(t)$ с известной непрерывной скоростью:

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^{t} V(s)\,ds.$$

Для разрушения клеток предположение «за малое время погибает доля, пропорциональная числу живых» даёт $N' = -\kappa N$, $\kappa > 0$, откуда $N = N_0 e^{-\kappa(t-t_0)}$. Постоянная имеет размерность обратного времени; отрицательный знак описывает убывание.

Для гармонического осциллятора $mx'' = -kx$, $m, k > 0$, поэтому $x'' + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{k/m}$ и

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Форма $A\cos(\omega t + \varphi)$ эквивалентна, но при $A = 0$ фаза не определяется. Начальные условия удобнее накладывать на форму с C_1, C_2.

Понять смысл

Моделирование начинается со слов «какая величина меняется и по какому закону», а не с угадывания знакомого уравнения. Производная означает мгновенную скорость изменения; вторая производная координаты означает ускорение. Пропорциональность вводит коэффициент с определённой размерностью, а физическое направление процесса определяет знак.

Чтобы сохранить единые обозначения скалярных уравнений, в этом билете время обозначаем x, а изменяющуюся величину обозначаем $y(x)$. Для каждой модели заново поясняем смысл y. Это лишь смена букв: физические законы не зависят от обозначений. Во всех трёх примерах начало отсчёта времени выбрано при $x = 0$, а физическое наблюдение обычно ведётся при $x \geq 0$.

Хороший ответ включает четыре части: предположения модели, уравнение с начальными данными, решение, проверку физического смысла. Нужно объяснить не только полученную формулу, но и почему она описывает именно поставленную ситуацию.

Модель 1: радиоактивный распад

Пусть $y(x)$ означает количество нераспавшегося вещества. В непрерывной модели предполагается, что за малый промежуток времени доля распада приблизительно пропорциональна его длительности, а коэффициент распада постоянен. Поэтому

$$y' = -\lambda y, \qquad \lambda > 0, \qquad y(0) = y_0 \geq 0.$$

Минус отражает уменьшение количества; размерность λ есть обратное время. Формула для средней макроскопической величины не утверждает, что отдельные атомы распадаются плавно.

Если $y_0 > 0$, разделяем переменные на участке, где $y > 0$:

$$\frac{y'}{y} = -\lambda, \qquad \ln y = -\lambda x + C_1, \qquad y = Ce^{-\lambda x}.$$

Из начального условия $C = y_0$, откуда

$$y(x) = y_0 e^{-\lambda x}.$$

При $y_0 = 0$ имеется решение $y \equiv 0$, которое проверяется отдельно после деления на y. Оно также включено в итоговую формулу. Подстановка даёт $y' = -\lambda y_0 e^{-\lambda x} = -\lambda y$. При $x \geq 0$ количество неотрицательно, убывает при $y_0 > 0$ и стремится к нулю, не достигая его за конечное время.

Период полураспада. Число $T_{1/2} > 0$ определяется условием $y(T_{1/2}) = \frac{y_0}{2}$ при $y_0 > 0$. Тогда

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}, \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \qquad y(x) = y_0\, 2^{-\frac{x}{T_{1/2}}}.$$

Период полураспада не зависит от начального количества. Если он равен 3 часам, то спустя 9 часов останется $\frac{y_0}{8}$, а не нуль. Экспоненциальное убывание нельзя заменить линейным вычитанием одинаковых количеств через одинаковые интервалы.

Модель 2: свободные гармонические колебания

Пусть $y(x)$ есть смещение груза массы $m > 0$ от положения равновесия. Груз соединён с пружиной жёсткости $k > 0$, движение одномерное, трения и внешней силы нет, а закон Гука считается применимым. Восстанавливающая сила направлена против смещения:

$$F = -ky.$$

По второму закону Ньютона $my'' = F$, поэтому

$$my'' + ky = 0, \qquad y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0.$$

Это уравнение второго порядка. Для конкретного движения требуются два начальных условия: положение $y(0) = y_0$ и скорость $y'(0) = v_0$.

Функции $\cos(\omega x)$ и $\sin(\omega x)$ при двукратном дифференцировании умножаются на $-\omega^2$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Полнота этой формулы будет обоснована общей линейной теорией; здесь можно непосредственно проверить и уравнение, и любые начальные данные. Дифференцируем:

$$y' = -\omega C_1 \sin(\omega x) + \omega C_2 \cos(\omega x).$$

Следовательно, $C_1 = y_0$, $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ и

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega x).$$

При отпускании из покоя $v_0 = 0$. Период ненулевого движения равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а амплитуда равна

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Если оба начальных значения нулевые, груз остаётся в равновесии; говорить о наименьшем положительном периоде этого постоянного решения некорректно.

Проверка через энергию. Механическая энергия

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}(y')^2 + \frac{k}{2}y^2$$

постоянна, поскольку

$$\mathcal{E}' = my'y'' + kyy' = y'(my'' + ky) = 0.$$

Это объясняет неизменность амплитуды. Если в ответе без трения появилась затухающая экспонента, стоит проверить постановку: она соответствует другой модели. При $m = 1$, $k = 4$, $y_0 = 1$, $v_0 = 2$ имеем $\omega = 2$ и $y = \cos 2x + \sin 2x$, амплитуду $\sqrt{2}$ и период π.

Модель 3: охлаждение Ньютона

Пусть $y(x)$ означает температуру тела, а y_s есть постоянная температура окружающей среды. Предполагается, что температура внутри тела описывается одной величиной, среда не меняется и коэффициент теплообмена $k > 0$ постоянен. Скорость изменения температуры пропорциональна разности температур с противоположным знаком:

$$y' = -k(y - y_s), \qquad y(0) = y_0.$$

Введём $z = y - y_s$. Поскольку y_s постоянно, имеем $z' = y'$ и получаем $z' = -kz$. Значит,

$$y(x) = y_s + (y_0 - y_s)e^{-kx}.$$

При $y_0 > y_s$ тело остывает; при $y_0 < y_s$ нагревается. Если $y_0 = y_s$, температура постоянна. Знак разности $y - y_s$ сохраняется, и в рамках этой модели температура среды не пересекается.

Пусть среда имеет температуру 20, начальная температура равна 80, а через 10 минут измерено 50 в одной и той же температурной шкале. Тогда

$$50 - 20 = (80 - 20)e^{-10k}, \qquad k = \frac{\ln 2}{10} \text{ мин}^{-1}.$$

Через 20 минут получим $y(20) = 20 + \frac{60}{4} = 35$. Чтобы найти время достижения температуры 25, решаем

$$5 = 60e^{-kx}, \qquad x = \frac{10 \ln 12}{\ln 2} \text{ мин}.$$

В логарифме возникает отношение температурных разностей, то есть безразмерное число. Если температура среды меняется со временем, замена $z = y - y_s(x)$ даёт $z' = y' - y_s'(x)$: прежняя формула без поправки уже не подходит.

Параметры, начальные данные и размерности

Постоянный параметр модели и произвольная постоянная решения играют разные роли. Коэффициент распада λ задаётся свойствами процесса; постоянная C в $Ce^{-\lambda x}$ выбирается начальным количеством. Жёсткость k и масса m определяют частоту пружины; C_1, C_2 выбирают конкретное движение той же пружины. Если неизвестен параметр, для его определения нужны дополнительные измерения, а не ещё одна произвольная постоянная интегрирования.

Например, если для распада известны два положительных измерения $y(x_1)$ и $y(x_2)$ при $x_2 > x_1$, то

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} = e^{-\lambda(x_2 - x_1)}, \qquad \lambda = \frac{\ln\left(\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\right)}{x_2 - x_1}.$$

Для охлаждения ту же формулу применяют к разности $y - y_s$, сохраняя её знак или беря модули обеих разностей. Подставлять сами температуры вместо разностей нельзя.

Аргументы экспоненты, синуса и косинуса должны быть безразмерными. Поэтому λ и коэффициент теплообмена имеют размерность обратного времени, а ω также измеряется в обратных единицах времени. Отношение $\frac{v_0}{\omega}$ имеет размерность смещения, что дополнительно проверяет формулу колебаний. Буква k в двух моделях обозначает разные физические параметры, а не одну общую константу.

Как решать задачи и отвечать у доски

Сначала назвать искомую величину и единицы. Затем объяснить знак, постоянные и ограничения модели. Записать начальные данные до интегрирования: это помогает понять, сколько постоянных требуется. После вычислений проверить решение подстановкой и исследовать хотя бы начальное значение и поведение при больших временах. Для второго порядка дополнительно проверить начальную скорость.

В устном ответе разумно подробно вывести распад и колебания, затем показать, что охлаждение сводится к распаду разности температур. Однако третий пример нельзя просто назвать: нужно выписать замену, решение и его смысл. Колебания и распад разобраны в лекционных записях; охлаждение дополнительно приведено в сборнике Якуба. Все три модели соответствуют тематике билета. Приоритет текущего устного требования преподавателя сохраняется, но расширять ответ случайным перечнем других моделей не нужно.

Проверка себя

1. За 4 часа количество вещества уменьшается вдвое. Какая доля останется через 12 часов и чему равна λ?
2. Решите $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. Найдите амплитуду и период.
3. Тело имеет начальную температуру 10, среда 30, коэффициент $k = \frac{1}{5}$ в обратных минутах. Запишите температуру и определите знак производной.

Ответы. 1. Останется $\frac{1}{8}$; $\lambda = \frac{\ln 2}{4}$ в обратных часах. 2. $y = 2\sin 3x$, амплитуда 2, период $\frac{2\pi}{3}$. 3. $y = 30 - 20e^{-\frac{x}{5}}$, $y' = 4e^{-\frac{x}{5}} > 0$: тело нагревается.

Частые ошибки

Теряют минус у распада и охлаждения; путают частоту ω с периодом; забывают делить начальную скорость на ω; используют одно условие для определения двух постоянных; делят на нулевую величину и теряют равновесие; смешивают часы и минуты. Физический смысл является самостоятельной проверкой: масса вещества не должна самопроизвольно расти в модели распада, а незатухающая пружина не должна терять энергию.