БИЛЕТ 2

Геометрическая интерпретация и основные определения

Источники: Лекции: с. 2-11 PDF. Сборник Якуба: с. 10-13 PDF. Старый сборник: с. 7-9 PDF.

Объём ответа: Поле направлений, изоклины, особые точки, интегральные кривые, интеграл и общее решение; объяснение на примерах.

Доработка по фотографиям: вопрос 2

IMG_1949–IMG_1952; главы 2.

Что требуется. Поле и расширенное поле направлений, изоклины, особая точка, интегральная кривая и общий интеграл.

Для $y' = f(x, y)$ изоклина наклона k задаётся $f(x, y) = k$. Для дробной записи $y' = P/Q$ удобнее направление вектора (Q, P): там, где $Q = 0$, $P \neq 0$, оно вертикально. Общий нуль $P = Q = 0$ требует отдельного исследования; после сокращения общего множителя область исходного уравнения автоматически не расширяется.

Пример со снимка: $y' = -x/y$. Изоклины удовлетворяют $-x/y = k$, а интеграл равен $x^2 + y^2 = C$. В начале координат расширенное поле не определено, в остальных точках оно задано вектором $(y, -x)$. Окружность является целой интегральной кривой расширенного поля, но не графиком одной функции $y(x)$: графиковые ветви имеют вид $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ и исключают точки $y = 0$ исходной дроби.

Общее решение в явном виде и общий интеграл в неявном виде должны охватывать все локальные решения рассматриваемой области. После деления на выражение, которое может обратиться в нуль, отдельно возвращаем потерянные ветви.

Понять смысл

Равенство $y' = f(x, y)$ можно читать без нахождения формулы $y(x)$. В каждой точке (x, y) известно, какой наклон должна иметь проходящая через неё интегральная кривая. Если $f = 0$, касательная горизонтальна; если $f > 0$, решение локально возрастает; если $f < 0$, убывает. Соседние короткие отрезки показывают возможное поведение решения и помогают обнаружить ошибку в вычислениях.

Геометрическая картина не заменяет условий теорем. Нарисовать одну плавную кривую через точку ещё не значит доказать, что другой нет. Для единственности понадобятся условия билета 4. Кроме того, график функции $y(x)$ нужно отличать от параметрической кривой на плоскости: полная окружность не является графиком одной функции от x.

Точная формулировка

Поле направлений и изоклина. Пусть f определена на области $D \subset \mathbb{R}^2$. Полем направлений уравнения называется сопоставление точке $(x, y) \in D$ прямой с направляющим вектором

$$(1, f(x, y)).$$

Угол α этой прямой с положительным направлением оси x удовлетворяет $\tan\alpha = f(x, y)$; направление прямой понимается с точностью до добавления π. Изоклина наклона k есть множество

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}.$$

Это множество не обязано быть одной прямой или одной связной кривой. Изоклина показывает одинаковые наклоны, но обычно сама не является интегральной кривой.

Интегральная кривая. Для скалярного уравнения в нормальной форме интегральная кривая есть график его решения. Условие касания поля равносильно равенству $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Внутри области непрерывной конечной правой части такой график не имеет вертикальной касательной с бесконечным наклоном.

Особая точка: важное различие. Для геометрического поля направлений изолированной особой точкой называют точку, где направление не определено, хотя определено во всей достаточно малой проколотой окрестности. Часто поле задают вектором $(P(x, y), Q(x, y))$ или соотношением

$$P(x, y)\,dy - Q(x, y)\,dx = 0.$$

Там, где $P \neq 0$, получается $y' = \frac{Q}{P}$. При $P = 0$, $Q \neq 0$ геометрическое направление вертикально и вполне определено, но нормальная скалярная запись уже неприменима. Точка $P = Q = 0$ может быть особой; для изолированности надо проверить отсутствие других общих нулей поблизости.

Поэтому разрыв дроби и особая точка полного поля не одно и то же. У $y' = -\frac{x}{y}$ исключена вся прямая $y = 0$, а у геометрического поля $(y, -x)$ единственная особая точка есть $(0, 0)$. Называть начало координат единственной точкой неопределённости самой дроби было бы неверно.

Интеграл, первый интеграл, общее решение. В терминологии рассматриваемого билета интегралом называется неявное соотношение $\Phi(x, y) = 0$, задающее интегральную кривую или её подходящую графическую ветвь. Чтобы извлечь график, обычно достаточно условия $\Phi_y \neq 0$. Отдельно употребляется термин «первый интеграл»: это функция $H(x, y)$, постоянная вдоль решений. Для $H \in C^1$ достаточна проверка

$$H_x(x, y) + f(x, y)H_y(x, y) = 0.$$

Действительно, производная $H(x, y(x))$ по правилу цепочки равна левой части. Уровни $H = C$ затем дают интегральные кривые там, где они допускают нужные графические ветви.

Общее решение в рассматриваемой области есть семейство $y = \varphi(x, C)$, члены которого являются решениями и которое описывает все решения в этой области с учётом ограничений на интервалы. Общий интеграл есть аналогичное неявное семейство $\Phi(x, y, C) = 0$. Фраза

«все решения» требует проверки: при делении на y часто теряется решение $y \equiv 0$. В задачах с неединственностью простое однопараметрическое семейство вообще может не охватывать все возможные склеивания.

Как строить качественную картину

1. Сначала найти область определения. Не дорисовывать решение через исключённую линию только потому, что рисунок кажется гладким.
2. Найти нулевую изоклину $f = 0$ и несколько уровней $f = k$, например $k = 1, -1$.
3. Отметить знаки f в оставшихся областях и наклоны на изоклинах.
4. Если известен первый интеграл, исследовать его уровни, выбрать допустимые ветви.
5. Проверить полученное описание подстановкой или дифференцированием неявного равенства.

Для $y' = x + y$ изоклины имеют вид $y = -x + k$. Нулевая изоклина $y = -x$ не есть решение: производная этой прямой равна -1, тогда как правая часть на ней равна нулю. Она лишь показывает места горизонтальных касательных возможных решений.

Пример: окружности и графические ветви

Для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0,$$

умножаем равенство на y и получаем

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2yy' = 0.$$

Следовательно, $H = x^2 + y^2$ является первым интегралом. Уровень $H = R^2$, где $R > 0$, даёт два максимальных графических решения:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad y = -\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R < x < R.$$

Именно открытые верхняя и нижняя полуокружности служат графиками решений. Точки $(\pm R, 0)$ не входят в область исходного уравнения. В этих точках производная ветви не конечна, так что объединить полуокружности в одно классическое решение $y(x)$ нельзя.

Если вместо скалярного уравнения рассмотреть систему $\dot{u}_1 = u_2$, $\dot{u}_2 = -u_1$, где точка означает производную по t, то полные окружности будут её фазовыми траекториями. Здесь координаты зависят от отдельного параметра времени, поэтому запрета на две разные ординаты при одной абсциссе нет. Такое различие понадобится в билетах об автономных системах.

Для конечного k изоклины удовлетворяют $-\frac{x}{y} = k$. При $k = 0$ это $x = 0$, $y \neq 0$; при $k \neq 0$ это $y = -\frac{x}{k}$ с исключением нуля. В геометрически продолженном поле направление вертикально на $y = 0$, $x \neq 0$.

Ещё один пример: лучи

У $y' = \frac{y}{x}$ область есть $x \neq 0$. Проверка

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = 0$$

даёт $y = Cx$. На $x > 0$ и $x < 0$ получаем отдельные лучи без начала координат. Здесь каждая изоклина $y = kx$ одновременно является решением: её собственный наклон k совпадает с наклоном поля. Это особенность данного примера, а не общее свойство изоклин. Полное поле (x, y) имеет изолированную особую точку в начале координат, тогда как дробь $\frac{y}{x}$ не определена на всей оси $x = 0$.

Как читать наклоны и неявные уровни

Для $y' = y$ нулевая изоклина совпадает с горизонтальной осью. Выше неё наклоны положительны, ниже отрицательны; на одной горизонтальной прямой все наклоны равны. Формула $y = Ce^x$ согласуется с рисунком: положительное решение возрастает, отрицательное убывает, а нулевое остаётся на оси. Две соседние положительные кривые могут визуально сближаться слева, но не пересекаются в конечной точке. Последнее утверждение позднее будет следовать из единственности задачи Коши.

У неявного уровня полезно проверять производную по y. Если $H(x, y) = C$ и $H_y \neq 0$, то локально

$$y' = -\frac{H_x}{H_y}.$$

Для $H = x^2 + y^2$ получается $y' = -\frac{x}{y}$, но только при $y \neq 0$. В точках уровня с $y = 0$ знаменатель исчезает: именно там перестаёт работать описание окружности как гладкого графика $y(x)$. Это не вычислительная случайность, а точное согласование аналитического условия с геометрией вертикальной касательной.

Ответ у доски

Объяснить равенство $\tan\alpha = f(x, y)$, определить поле направлений и изоклину. Сформулировать понятия графика решения, общего решения и общего интеграла. Дать определение изолированной особой точки с уточнением, какое поле рассматривается. Затем разобрать $y' = -\frac{x}{y}$: первый интеграл, две ветви, область и отличие от полной фазовой окружности. Если остаётся время, противопоставить изоклины $y' = x + y$ и $y' = \frac{y}{x}$.

Проверка себя

1. Найдите изоклины $y' = xy$ для наклонов 0 и 1.
2. Является ли прямая $y = x$ изоклиной и решением $y' = x - y$?
3. Проверьте, что $H(x, y) = ye^{-x}$ есть первый интеграл $y' = y$. Выпишите общий интеграл и общее решение.

Ответы. 1. Для нулевого наклона $xy = 0$, то есть обе координатные оси; для наклона 1 гипербола $xy = 1$. 2. Это нулевая изоклина, но не решение, потому что $1 \neq 0$. 3.

$H_x + yH_y = -ye^{-x} + ye^{-x} = 0$; общий интеграл $ye^{-x} = C$, общее решение $y = Ce^x$.

Частые ошибки

Считают любую изоклину решением; рисуют целую окружность как график $y(x)$; путают вертикальное направление с неопределённым; называют все точки исключённой прямой одной «изолированной особой точкой»; забывают проверку полноты семейства. Грамотный рисунок начинается с области определения и подписи осей.