БИЛЕТ 1

Основные понятия: ОДУ, порядок, решение

Источники: Лекции: с. 1-2 PDF. Сборник Якуба: с. 6-9 PDF. Старый сборник: с. 6 PDF.

Объём ответа: Определения, формы записи и примеры. Доказательство отдельной теоремы не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 1

IMG_1948; главы 1.

Что требуется. Определения, разрешённая форма и примеры.

Решение задаётся вместе с интервалом: функция должна иметь нужные производные, её график должен лежать в области уравнения, а подстановка должна давать тождество. Порядок определяют по старшей действительно присутствующей производной, а не по степени функции.

На снимке есть $y' = \sin x/x$. Фраза «не решается» не должна означать отсутствие решения: при $x \neq 0$ имеем

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}\, ds.$$

Отсутствие элементарной первообразной не мешает существованию решения. Для исходной записи выбираем интервал без нуля; если отдельно определить правую часть в нуле равной 1, получим другую, продолженную постановку.

Проверка. $xy' - y = x^2$ при $x = 0$ нельзя механически делить на x. На $x > 0$ ответ $y = x^2 + Cx$; подстановка даёт $x(2x + C) - (x^2 + Cx) = x^2$.

Понять смысл

Дифференциальное уравнение описывает связь между неизвестной функцией и скоростью её изменения. Например, равенство $y' = 2y$ говорит: в каждой точке производная вдвое больше значения функции. Это ещё не задаёт одну функцию: подходят e^{2x}, $3e^{2x}$ и нулевая функция. Уравнение задаёт закон изменения, а дополнительные условия позволяют выбрать конкретное движение по этому закону.

Главное отличие от алгебраического уравнения состоит в объекте поиска. В равенстве $z^2 = 4$ ищут число; в равенстве $y' = 2y$ ищут функцию на интервале. Поэтому ответом служит не только формула, но и область, на которой она имеет смысл и удовлетворяет уравнению. Функция $y = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ и та же формула на $(-\infty, 0)$ задают разные решения в смысле «функция вместе с её интервалом».

В этом пособии приведены математически проверенные рабочие формулировки. Они передают содержание билетов сборника, но не являются дословными цитатами преподавателя.

Точная формулировка

Обыкновенное дифференциальное уравнение. ОДУ порядка n имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где искомая скалярная функция $y = y(x)$ зависит от одной независимой переменной, а старшая действительно входящая производная имеет порядок n. Функция F задана на некотором множестве допустимых значений своих аргументов. Слово «обыкновенное» отличает такое уравнение от уравнения в частных производных для функции нескольких переменных.

Порядок определяется производной, а не её степенью. Уравнение $(y')^5 + y = 0$ имеет первый порядок; $y'' + y = 0$ имеет второй. Если старшая производная умножена на коэффициент, обращающийся в нуль, поведение в таких точках нужно исследовать отдельно. Например, в $xy' = y$ коэффициент при y' равен нулю при $x = 0$: нормальная форма там недоступна.

Разрешённая форма. Уравнение называется разрешённым относительно старшей производной, если оно записано как

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Для первого порядка это $y' = f(x, y)$. Такая запись задаёт единственное значение производной для каждой допустимой пары (x, y). Неявное уравнение $(y')^2 + y^2 = 1$ в области $|y| < 1$ допускает два значения

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \qquad y' = -\sqrt{1 - y^2}.$$

Выбор одной ветви даёт новое, более конкретное уравнение; нельзя без пояснения заменить исходное уравнение только положительным корнем.

Решение. Функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$, где I есть интервал, называется решением ОДУ порядка n, если на I существуют все необходимые производные, аргументы выражения F принадлежат области его определения и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{для всех } x \in I.$$

Равенство должно выполняться тождественно, а не в нескольких проверенных точках. В стандартной ситуации непрерывной правой части разрешённого уравнения решение имеет непрерывную старшую производную. Для обсуждения разрывных правых частей в билете 6 отдельно различим простую дифференцируемость и принадлежность классу C^1.

График $\{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$ называется интегральной кривой скалярного уравнения. Ограничение решения на меньший интервал тоже является решением. Если решение нельзя расширить на больший интервал, сохранив уравнение и прежние значения, его называют максимальным; точное определение будет в билете 8.

Как проверять и записывать решения

Надёжная проверка состоит из четырёх шагов.

1. Указать интервал I и проверить допустимость выражений: знаменателей, корней, логарифмов, степеней.
2. Вычислить производные до требуемого порядка.
3. Подставить в исходное уравнение и получить тождество на всём I.
4. Если заданы начальные условия, проверить каждое из них отдельно.

Проверка найденной функции доказывает, что она является решением. Она сама по себе не доказывает, что найдены все решения. Чтобы назвать семейство общим решением, нужно дополнительно обосновать его полноту.

Константа интегрирования существенна: из $y' = \cos x$ получается семейство $y = \sin x + C$, а не только $y = \sin x$. У уравнения второго порядка обычно появляются две независимые постоянные, но подсчёт постоянных не заменяет теорему о структуре решений. Особенно осторожно нужно обращаться с неявными и вырожденными уравнениями.

Отсутствие элементарной первообразной не означает отсутствия решения. При $x_0 > 0$ задача

$$y' = \frac{\sin x}{x}, \qquad y(x_0) = y_0$$

имеет решение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}\, ds, \qquad x > 0.$$

Это полноценный точный ответ. Подынтегральная функция непрерывна, поэтому производная интеграла совпадает с ней. Если требуется включить нуль, сначала нужно явно доопределить правую часть значением 1; исходная дробь в нуле не определена.

Пример: проверка семейства и вырожденной точки

Рассмотрим

$$xy' - y = x^2.$$

Предлагается семейство $y = x^2 + Cx$. Вычисляем $y' = 2x + C$ и подставляем:

$$x(2x + C) - (x^2 + Cx) = x^2.$$

Следовательно, каждая такая функция решает исходное уравнение на всей $\mathbb{R}$. Если переписать его как $y' = \frac{y}{x} + x$, новая запись имеет смысл только при $x \neq 0$. На каждом из интервалов $x > 0$ и $x < 0$ можно получить семейство непосредственно:

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = 1, \qquad \frac{y}{x} = x + C.$$

Именно исходное равенство позволило затем проверить решение в нуле. Нельзя считать, что деление на x доказало что-либо в точке $x = 0$.

Если решение дифференцируемо на интервале, содержащем нуль, то слева и справа формально могли бы появиться постоянные C_- и C_+. В нуле исходное уравнение требует $y(0) = 0$, а существование производной требует $C_- = C_+$. Так объясняется, почему допустимое склеивание вновь приводит к одному C. Это небольшой пример того, как область и гладкость дополняют вычисления.

Почему проверка в одной точке недостаточна

Пусть для уравнения $y' = 2y$ предложена функция $\varphi(x) = x^2$. В точке $x = 0$ действительно $\varphi'(0) = 0 = 2\varphi(0)$. Однако на всём интервале требовалось бы тождество $2x = 2x^2$, которое неверно. Совпадение в одной точке говорит лишь о подходящем наклоне в этой точке. Аналогично, совпадение нескольких первых производных двух функций в начале не означает их совпадения на интервале.

Ещё одна полезная проверка касается слов «уравнение» и «решение». Запись $y' = 2y$ есть требование к неизвестной функции. Запись $y = e^{2x}$ есть конкретная функция, которую надо проверить. Запись $y = Ce^{2x}$ есть семейство функций. Наконец, $y(0) = 3$ есть дополнительное условие, выбирающее член семейства с $C = 3$. Если уверенно различать эти четыре объекта, дальнейшие определения задачи Коши, общего решения и метода вариации постоянных будут значительно понятнее.

Ответ у доски

Сначала сказать, что ищется функция одной переменной, и записать общий вид ОДУ порядка n. Затем определить порядок и решение на интервале, подчёркивая тождество после подстановки. После этого выписать нормальную форму и привести три коротких примера: первое уравнение, второе уравнение и неявное уравнение с двумя ветвями производной. Закончить проверкой одной функции и замечанием, что решение может быть задано определённым интегралом.

Проверка себя

1. Каков порядок уравнения $(y'')^3 + y' = x$? Разрешено ли оно относительно старшей производной в записанном виде?
2. Проверьте $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ для $y'' + y = 0$ и найдите постоянные из $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.
3. На каких максимальных интервалах формула $y = \frac{1}{1-x}$ задаёт решение $y' = y^2$? Какой интервал относится к условию $y(0) = 1$?

Ответы. 1. Второй порядок; в записанном виде не разрешено, но действительный кубический корень позволяет выразить $y'' = \sqrt[3]{x - y'}$. 2. После двух дифференцирований $y'' = -y$; $C_1 = 2$, $C_2 = -3$. 3. Интервалы $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$; условию при нуле соответствует первый.

Частые ошибки

Путают порядок со степенью; забывают интервал; считают проверку в одной точке доказательством; делят на выражение, способное обращаться в нуль; объявляют интеграл без элементарной первообразной «нерешаемым уравнением». Полезная привычка: рядом с каждым ответом писать область и одну строку подстановки.