ПОДГОТОВКА С 22 НОЯБРЯ 2026

Дифференциальные уравнения

26 вопросов на фотографиях

30 глав полного курса

Пособие, доработанное по всему найденному комплекту фотографий тетради и доски. Определения, доказательства, разобранные примеры, вычислительная база, задачи и ключи.

Нумерация глав прежнего курса сохранена. Номер вопроса тетради ищи в таблице соответствия и в начале нужной главы. Новые блоки помогают связать твои записи с полным ответом; они не заменяют доказательства в основной части.

Редакция 22 ноября 2026 года.

Рабочий горизонт закрепления: 10 января 2027 года.

Дата экзамена в исходных материалах не подтверждена.

Как пользоваться этой редакцией

Сначала открой новый план. Сегодняшний первый урок помещён перед ним: за 45 минут можно начать работу, не возвращаясь к пропущенным неделям. Затем выбирай вопрос тетради и соответствующую главу. Точное содержание снимка и математически восстановленное объяснение различаются в подписи и тексте.

Сначала пойми смысл и разбери один пример со всеми переходами. Потом восстанови формулировку, предположения, цель и 3–6 шагов доказательства на чистом листе. Если шаг не получается, открой только нужное место и продолжи; повторять вслух уже показанные строки само по себе не является проверкой понимания.

Для каждого вопроса отдельно отмечай: объясняю смысл; воспроизвожу условия; доказываю требуемое; решаю пример. Вопрос считается освоенным после самостоятельного воспроизведения с отложенной повторной проверкой. Прочтение и готовность различаются.

Практика идёт с первой недели. Перед ответами в конце курса есть задачи по первому порядку, постоянным коэффициентам, системам и устойчивости. Разборы самостоятельной по снимкам доски открывай после собственной попытки. Понимание теории не заменяет вычислительной проверки решения.

Нижний предел интеграла, интервал определения, произвольные постоянные и коэффициенты пробной формы всегда записывай явно. После решения проверь исходное уравнение и каждое начальное условие.

Содержание

Как пользоваться этой редакцией **2**

Сверка с фотографиями: как связаны номера **13**
Что изменено по существу 14

Первое занятие: сегодня, 22 ноября **15**
Задача с полным объяснением 15
Следующая самостоятельная попытка 15

Новый маршрут: 22 ноября – 10 января **16**
Честный бюджет 16
Повторение и критерий перехода 16
Неделя 1: 23.11–29.11. Определения и локальная теория 17
Неделя 2: 30.11–06.12. Первый порядок и переход к системам 18
Неделя 3: 07.12–13.12. Линейная теория и вариация постоянных 19
Неделя 4: 14.12–20.12. Постоянные коэффициенты и резонанс 20
Неделя 5: 21.12–27.12. Автономные системы и устойчивость 21
Неделя 6: 28.12–03.01. Дополнения и исправление пробелов 22
Неделя 7: 04.01–10.01. Итоговая проверка 23
Журнал одной ошибки 23

Билет 1 Основные понятия: ОДУ, порядок, решение **24**
Доработка по фотографиям: вопрос 1 24
Понять смысл 24
Точная формулировка 25
Как проверять и записывать решения 25
Пример: проверка семейства и вырожденной точки 26
Почему проверка в одной точке недостаточна 27
Ответ у доски 27
Проверка себя 27
Частые ошибки 27

Билет 2 Геометрическая интерпретация и основные определения **28**
Доработка по фотографиям: вопрос 2 28
Понять смысл 28
Точная формулировка 29
Как строить качественную картину 30
Пример: окружности и графические ветви 30
Ещё один пример: лучи 31
Как читать наклоны и неявные уровни 31
Ответ у доски 31
Проверка себя 31
Частые ошибки 32

Билет 3 Физические задачи, приводящие к ОДУ **33**

Доработка по фотографиям: вопрос 3 . . . 33
Понять смысл . . . 33
Модель 1: радиоактивный распад . . . 34
Модель 2: свободные гармонические колебания . . . 34
Модель 3: охлаждение Ньютона . . . 35
Параметры, начальные данные и размерности . . . 36
Как решать задачи и отвечать у доски . . . 36
Проверка себя . . . 36
Частые ошибки . . . 37

Билет 4 Задача Коши и теорема Коши-Липшица 38
Доработка по фотографиям: вопрос 4 . . . 38
Понять смысл . . . 38
Точная формулировка . . . 38
Доказательство достаточного условия Липшица . . . 39
Почему условие Липшица слабее . . . 40
Пример: как действительно доказать неединственность . . . 40
Как применять теорему . . . 41
Пример без производной правой части в нуле . . . 41
Ответ у доски . . . 41
Проверка себя . . . 41
Частые ошибки . . . 42

Билет 5 Интегральное уравнение и метод Пикара 43
Доработка по фотографиям: вопрос 5 . . . 43
Понять смысл . . . 43
Точная формулировка эквивалентности . . . 44
Доказательство . . . 44
Метод последовательных приближений . . . 45
Почему сходимость правдоподобна: полезная оценка . . . 45
Пример из билета: экспонента . . . 45
Что метод не обещает без гипотез . . . 46
Пример с явной зависимостью от независимой переменной . . . 46
Ответ у доски . . . 47
Проверка себя . . . 47
Частые ошибки . . . 47

Билет 6 Теорема Пеано и роль непрерывности 48
Доработка по фотографиям: вопрос 6 . . . 48
Понять смысл . . . 48
Точная формулировка . . . 49
Непрерывность даёт существование, но не единственность . . . 49
Разрывная правая часть: решения может не быть . . . 49
Разрывная правая часть: решение всё же может быть . . . 50
Как рассуждать в задаче . . . 51
Что именно доказывает контрпример . . . 51
Ответ у доски . . . 51

Проверка себя . . . 52
Частые ошибки . . . 52

Билет 7 Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли 53
Статус в новом комплекте . . . 53
Понять смысл . . . 53
Линейное уравнение: точная формулировка . . . 53
Вывод формулы и глобальное существование . . . 54
Уравнение Бернулли: область и локальная теорема . . . 54
Как решать уравнение Бернулли . . . 55
Пример: локальная единственность и конечный взрыв . . . 55
Почему одного значения коэффициента недостаточно . . . 56
Ответ у доски . . . 56
Проверка себя . . . 56
Частые ошибки . . . 57

Билет 8 Продолжение решений и предельное поведение 58
Доработка по фотографиям: вопрос 7 . . . 58
Понять смысл . . . 58
Точная формулировка определений . . . 59
Теорема о выходе из компактов . . . 59
Почему внутреннее конечное препятствие невозможно . . . 59
Ограниченная и неограниченная области . . . 60
Пример 1: конечное время взрыва . . . 60
Пример 2: конечный предел на исключённой границе . . . 61
Полезное дополнение: линейный рост . . . 61
Ответ у доски . . . 61
Проверка себя . . . 61
Частые ошибки . . . 62

Билет 9 Уравнения с разделяющимися переменными 63
Доработка по фотографиям: вопрос 8 . . . 63
Понять смысл . . . 63
Точная формулировка . . . 64
Доказательство через обратную функцию . . . 64
Как решать задачи без потери решений . . . 65
Правая часть зависит только от x . . . 65
Правая часть зависит только от y . . . 66
Пример интегральных кривых . . . 66
Дополнительный пример из источников: разные границы . . . 66
Ответ у доски . . . 67
Проверка себя . . . 67
Частые ошибки . . . 67

Билет 10 Однородные уравнения первого порядка 68
Доработка по фотографиям: вопрос 9 . . . 68
Понять смысл . . . 68

Точная формулировка . . . 68
Доказательство существования и единственности . . . 69
Гомотетия: точное утверждение и доказательство . . . 70
Инвариантные лучи . . . 70
Пример: нелинейное однородное уравнение . . . 70
Что может случиться на инвариантном луче . . . 71
Как решать задачи и отвечать у доски . . . 72
Проверка себя . . . 72
Частые ошибки . . . 72

Билет 11 Теорема существования и единственности для уравнения высшего порядка 73
Доработка по фотографиям: вопрос 10 . . . 73
Понять смысл . . . 73
Определения и точная формулировка . . . 74
Почему получается именно такая теорема . . . 74
Как применять теорему . . . 75
Разобранный пример . . . 75
Ответ у доски . . . 76
Проверка себя . . . 76
Частые ошибки . . . 76

Билет 12 Нормальные и линейные системы ОДУ 77
Связь с фотографиями . . . 77
Понять смысл . . . 77
Определения . . . 77
Точная локальная теорема . . . 78
Применение к линейной системе . . . 78
Разобранный пример . . . 79
Ответ у доски . . . 79
Проверка себя . . . 80
Частые ошибки . . . 80

Билет 13 Линейная зависимость вектор-функций и вронскиан 81
Доработка по фотографиям: вопрос 11 . . . 81
Понять смысл: два разных вида зависимости . . . 81
Определения и порядок кванторов . . . 82
Общие утверждения и доказательства . . . 82
Главная лемма для решений ЛОС . . . 83
Разобранные применения . . . 84
Ответ у доски . . . 84
Проверка себя . . . 84
Частые ошибки . . . 85

Билет 14 Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица ЛОС 86
Доработка по фотографиям: вопрос 12 . . . 86
Понять смысл . . . 86

Определения и точная теорема . . . 86
Полное доказательство общего решения . . . 87
Переход между фундаментальными матрицами . . . 88
Разобранный пример . . . 88
Ответ у доски . . . 89
Проверка себя . . . 89
Частые ошибки . . . 89

Билет 15 Определитель и формула Лиувилля 90
Доработка по фотографиям: вопрос 13 . . . 90
Понять смысл . . . 90
Формула дифференцирования определителя . . . 91
Точная формула Лиувилля-Остроградского . . . 91
Полное доказательство при $n = 2$ . . . 92
Что из формулы следует . . . 92
Разобранный пример . . . 93
Ответ у доски . . . 93
Проверка себя . . . 93
Частые ошибки . . . 94

Билет 16 Структура общего решения ЛНС. Вариация постоянных 95
Доработка по фотографиям: вопрос 14 . . . 95
Понять смысл . . . 95
Точная теорема и доказательство . . . 96
Вывод метода вариации постоянных . . . 96
Алгоритм решения задачи . . . 97
Разобранный пример . . . 97
Ответ у доски . . . 98
Проверка себя . . . 98
Частые ошибки . . . 98

Билет 17 Линейное уравнение высшего порядка: система, ФСР и вронскиан 99
Доработка по фотографиям: вопрос 15 . . . 99
Понять смысл и зафиксировать область . . . 99
Переход к системе и его обратимость . . . 100
Сохранение линейной зависимости: доказательство . . . 100
ФСР и теорема об общем решении . . . 100
Скалярный вронскиан и границы его применения . . . 101
Формула Лиувилля-Остроградского и доказательство . . . 102
Разобранный пример . . . 102
Ответ у доски . . . 102
Проверка себя . . . 102
Частые ошибки . . . 103

Билет 18 Построение ЛОУ по ФСР. Вариация постоянных для ЛНУ 104
Доработка по фотографиям: вопрос 16 . . . 104
Понять смысл . . . 104

Теорема о построении уравнения . . . 105
Полное доказательство . . . 105
Пример обратной задачи и роль интервала . . . 106
Вариация постоянных: постановка и вывод . . . 106
Разобранное неоднородное уравнение . . . 107
Дополнение: понижение порядка по известному решению . . . 107
Ответ у доски . . . 108
Проверка себя . . . 108
Частые ошибки . . . 108

Билет 19 Характеристический многочлен. Некратные корни 109
Доработка по фотографиям: вопрос 17 . . . 109
Понять смысл . . . 109
Определения и точная теорема . . . 109
Доказательство: сначала решения, затем независимость . . . 110
Комплексные корни и вещественные решения . . . 111
Разобранный пример с начальными данными . . . 111
Практический алгоритм и контроль . . . 112
Ответ у доски . . . 112
Проверка себя . . . 112
Частые ошибки . . . 112

Билет 20 Кратные характеристические корни. Формула смещения 113
Доработка по фотографиям: вопрос 18 . . . 113
Понять смысл . . . 113
Операторы и формула смещения . . . 114
Точная теорема о кратных корнях . . . 114
Доказательство: каждая функция является решением . . . 115
Доказательство независимости: все логические шаги . . . 115
Вещественная форма при комплексных кратных корнях . . . 116
Разобранная задача Коши . . . 116
Ответ у доски . . . 117
Проверка себя . . . 117
Частые ошибки . . . 117

Билет 21 ЛНУ с квазимногочленом в правой части 118
Доработка по фотографиям: вопрос 19 . . . 118
Понять смысл . . . 118
Точная формулировка . . . 118
Доказательство . . . 119
Как решать задачи . . . 120
Пример: двукратный резонанс . . . 120
Ответ у доски . . . 121
Проверка себя . . . 121
Частые ошибки . . . 121

Билет 22 Интегральная формула Коши 122

Доработка по фотографиям: вопрос 20 . . . 122
Понять смысл . . . 122
Точная формулировка . . . 122
Построение ядра и необходимая регулярность . . . 123
Доказательство интегральной формулы . . . 123
Как решать задачи . . . 124
Пример с вычислением интеграла . . . 125
Ответ у доски . . . 125
Проверка себя . . . 125
Частые ошибки . . . 125

Билет 23 Общее решение ЛОС с постоянными коэффициентами 127
Доработка по фотографиям: вопрос 21 . . . 127
Понять смысл . . . 127
Точная формулировка и понятия . . . 128
Откуда берётся жорданов базис . . . 128
Доказательство теоремы о решениях . . . 129
Как получить вещественное решение . . . 130
Пример: трёхзвенная цепочка . . . 130
Ответ у доски . . . 130
Проверка себя . . . 130
Частые ошибки . . . 131

Билет 24 ЛНС с векторным квазимногочленом 132
Доработка по фотографиям: вопрос 22 . . . 132
Понять смысл . . . 132
Точная формулировка . . . 133
Доказательство: сначала убрать экспоненту . . . 133
Как выбирать пробную функцию . . . 134
Пример: граница достигается и не достигается . . . 135
Ответ у доски . . . 135
Проверка себя . . . 135
Частые ошибки . . . 135

Билет 25 Автономные системы и фазовые траектории 137
Доработка по фотографиям: вопрос 23 . . . 137
Понять смысл . . . 137
Точная постановка и определения . . . 138
Сдвиг времени: формулировка и доказательство . . . 138
Непересечение полных траекторий . . . 138
Повторное прохождение точки и периодичность . . . 139
Можно ли достичь равновесия? . . . 139
Примеры и построение портрета . . . 140
Ответ у доски . . . 140
Проверка себя . . . 140
Частые ошибки и границы источника . . . 140

Билет 26 Классификация линейных особых точек на плоскости **142**
Доработка по фотографиям: вопрос 24 . . . 142
Понять смысл и точная постановка . . . 142
Теорема Пуанкаре о линейной классификации . . . 143
Седло: противоположные знаки . . . 143
Обычный узел: разные корни одного знака . . . 143
Дикритический узел: два собственных вектора . . . 144
Вырожденный узел: один собственный вектор . . . 144
Фокус: комплексные корни с ненулевой вещественной частью . . . 144
Центр: чисто мнимые корни . . . 145
Быстрая классификация через след и определитель . . . 145
Ответ у доски и проверка себя . . . 145
Частые ошибки . . . 146
Фазовые портреты в одном развороте . . . 147
Повторный узел и фокус . . . 148

Билет 27 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость **149**
Доработка по фотографиям: вопрос 25 . . . 149
Понять смысл . . . 149
Точные определения и порядок кванторов . . . 150
Как доказывать неустойчивость . . . 150
Пример 1: устойчивое неограниченное решение . . . 150
Пример 2: устойчивость без притяжения . . . 151
Пример 3: неустойчивость с явными кванторами . . . 151
Пример 4: устойчивое и неустойчивое решения одного уравнения . . . 151
Ответ у доски . . . 152
Проверка себя . . . 152
Частые ошибки . . . 152

Билет 28 Устойчивость линейных систем и спектральный критерий **153**
Доработка по фотографиям: вопрос 26 . . . 153
Понять смысл . . . 153
Связь ЛНС и ЛОС: формулировка . . . 154
Доказательство сведения к разности . . . 154
Точная спектральная теорема . . . 154
Лемма: устойчивость равносильна ограниченности оператора перехода . . . 155
Доказательство спектрального критерия . . . 155
Примеры, которые различают похожие случаи . . . 156
Ответ у доски . . . 157
Проверка себя . . . 157
Частые ошибки . . . 157

Билет 29 Устойчивость по первому приближению **158**
Статус в новом комплекте . . . 158
Понять смысл . . . 158
Точная формулировка: автономный случай . . . 158
Вариант с явно зависящим от времени остатком . . . 159

Алгоритм применения . . . 159
Пример из сборника с проверкой знака . . . 160
Почему критический случай действительно неопределён . . . 160
Ответ у доски . . . 161
Проверка себя . . . 161
Частые ошибки . . . 161

Билет 30 Исключительные направления, Пуанкаре-Перрон и Лотка-Вольтерра 162
Статус в новом комплекте . . . 162
Понять смысл . . . 162
Особая точка и исключительное направление . . . 162
Геометрические типы . . . 163
Теорема Пуанкаре-Перрона: условия и границы . . . 163
Пример применения . . . 164
Модель Лотки-Вольтерры: постановка . . . 164
Равновесия и линеаризация . . . 165
Дополнительный строгий вывод: первый интеграл . . . 165
Как нарисовать портрет без догадок . . . 166
Ответ у доски . . . 166
Проверка себя . . . 167
Частые ошибки . . . 167

Вычислительная база 168
Производные и правила вычисления . . . 168
Правила вычисления производных . . . 169
Интегралы и замена переменной . . . 170
Замена переменной и интегрирование по частям . . . 171
Логарифмы и рациональные дроби . . . 172
Корни и выделение полного квадрата . . . 173
Тригонометрия без угадывания . . . 174
Простые дроби от записи до интеграла . . . 175
Комплексные числа и характеристические корни . . . 176
Матрицы определители и собственные векторы . . . 177

Практический справочник методов 178
1. Разделяющиеся переменные . . . 178
2. Замена линейного выражения . . . 179
3. Однородное первого порядка . . . 180
4. Отношение линейных выражений . . . 181
5. Линейное уравнение . . . 182
6. Уравнение Бернулли . . . 183
7. Замены приводящие к линейному . . . 184
8. Уравнение в полных дифференциалах . . . 185
9. Уравнение Клеро . . . 186
10. Уравнение Лагранжа . . . 187
11. Уравнение вида x равен функции производной . . . 188
12. Уравнение вида y равен функции производной . . . 189

H1. Отсутствует неизвестная функция . . . 190
H2. Отсутствует независимая переменная . . . 191
H3. Однородность по функции и производным . . . 192
H4. Полная производная . . . 193
H5. Обобщённая однородность . . . 194
Линейное уравнение с постоянными коэффициентами . . . 195
Уравнение Эйлера . . . 196
Когда метод не узнаётся сразу . . . 196

Практика от вычислений до экзамена **197**
Уровень А восемь коротких вычислений . . . 197
Уровень Б двенадцать задач первого порядка . . . 197
Уровень В девять задач высшего порядка . . . 198
Уровень Г восемь задач по системам и свойствам . . . 198
Разбор уровня А . . . 199
Разбор уровня Б . . . 200
Разбор уровня В . . . 202
Разбор уровня Г . . . 203
Три пробника для закрепления . . . 205
Как оценить пробник честно . . . 206

Практика по снимкам доски: самостоятельная №2 **207**
Что означают обозначения доски . . . 207
Задача 1: второй вариант, как на доске . . . 207
Задача 1: первый вариант и двойной резонанс . . . 208
Задача 2: второй вариант, построение ядра по системе . . . 208
Задача 2: первый вариант . . . 209
Задача 3: второй вариант, все коэффициенты . . . 209
Задача 3: первый вариант . . . 210
Минимум производных, нужный прямо сейчас . . . 210

Источники и границы точности **211**
Что лежит в основе пособия . . . 211
Где требуется доказательство . . . 211
Какие ошибки нельзя заучивать . . . 212
Что добавлено для понимания . . . 213
Новые источники редакции 22 ноября . . . 213

Сверка с фотографиями: как связаны номера

Редакция от 22 ноября 2026 года учитывает 79 фотографий тетради IMG_1948–IMG_2027 (файл IMG_2000 отсутствует) и 19 снимков доски IMG_1925–IMG_1943. В тетради явно пронумерованы вопросы 1–26. Нумерация 30 глав старого пособия сохранена, чтобы прежние ссылки и изученный материал не потерялись.

Главный маршрут — номер вопроса на фото, затем указанные главы. Отдельной главы 7, тем первого приближения и Лотки–Вольтерры на новых снимках нет; эти главы сохранены как дополнения старого комплекта. Вопрос 10 тетради использует главы 11–12, а вопрос 16 — метод вариации в главе 18. Восстановление уравнения по ФСР из главы 18 является дополнительной частью.

Фотографии подтверждают содержание записанного конспекта, но сами по себе не устанавливают дату будущего экзамена или официальный актуальный список. Рабочие ориентиры старых файлов — полный проход и закрепление к 10 января 2027 года; дата комиссии в них не указана. Новый план начинает работу 22 ноября 2026 года.

Фото №	Тема	Главы	IMG
1	ОДУ, порядок и решение	1	1948
2	Геометрия ОДУ	2	1949–1952
3	Модели движения, распада и колебаний	3	1953
4	Коши-Липшиц	4	1954–1957
5	Интегральная форма и Пикар	5	1958–1959
6	Пеано и непрерывность	6	1960
7	Продолжение решений	8	1961–1962
8	Разделяющиеся переменные	9	1963–1964
9	Однородная правая часть и лучи	10	1965–1967
10	Нормальные и линейные системы	11, 12	1968–1971
11	Зависимость вектор-функций и Вронскиан	13	1972–1974
12	ФСР и фундаментальная матрица	14	1975–1976
13	Определитель и Лиувилль	15	1977–1979
14	ЛНС и вариация постоянных	16	1980–1982
15	Скалярное линейное уравнение как система	17	1983–1987

Фото №	Тема	Главы	IMG
16	Вариация постоянных для скалярного ЛНУ	18	1988–1989
17	Простые характеристические корни	19	1990–1992
18	Кратные корни и смещение	20	1993–1995
19	Квазимногочлен и резонанс	21	1996–1998
20	Интегральная формула Коши	22	1999–2001
21	Постоянная матрица и жордановы цепочки	23	2002–2007
22	Векторный квазимногочлен	24	2008
23	Автономная система и траектории	25	2009–2013
24	Фазовые портреты линейной системы	26	2014–2019
25	Устойчивость по определению	27	2020–2023
26	Линейная устойчивость и спектр	28	2024–2027

Что изменено по существу

По каждому вопросу добавлен блок «Доработка по фотографиям» с привязкой к файлам. Дописаны незавершённые переходы: обратная функция в разделяющемся уравнении; специальная лемма о Вронскиане; независимость ФСР; минимальный период; сведение устойчивости к нулевому решению. Вопрос 22, оставленный в тетради без ответа, раскрыт в главе 24; достаточность спектрального критерия, оборванная на IMG_2027, завершена в главе 28.

Уточнены область в теореме продолжения, потери ветвей при делении, кванторы зависимости и устойчивости, случай нулевого Вронскиана, знак в скалярной формуле Лиувилля, максимальная степень векторного резонанса. Практика по доске разобрана отдельно, включая оба варианта пробника, все начальные условия и таблицу производных.

Неясные мелкие символы на фотографиях не переписаны как якобы точная цитата. При восстановлении используются явно названная тема вопроса и математически выведенные формулы. Оригинальные снимки доступны в фотоальбоме; автоматическое распознавание не считается доказательством правильности формулы.

Первое занятие: сегодня, 22 ноября

45 минут, без попытки отработать весь пропуск за вечер. 10 минут — открой таблицу соответствия и главу 1; 10 минут — восстанови производные произведения и экспоненты; 20 минут — пройди задачу ниже; 5 минут — сделай одну запись о том, какой переход пока непонятен. Можно разделить на два подхода.

Задача с полным объяснением

Решим $y' = 3xy$, $y(0) = 2$. Это уравнение первого порядка: в нём есть y', но нет более высоких производных. Правая часть — произведение функции x и функции y, значит переменные разделяются.

Шаг 1. Перед делением проверим $y = 0$: это решение уравнения, но оно не удовлетворяет $y(0) = 2$. В окрестности нуля искомое решение положительно по непрерывности, поэтому там можно делить на y.

$$\frac{y'}{y} = 3x.$$

Шаг 2. Левая часть — производная $\ln|y|$. Интегрируем:

$$\ln|y| = \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Шаг 3. Возводим в экспоненту. На выбранной ветви знак фиксирован; записываем $y = Ke^{3x^2/2}$. Условие при нуле даёт $K = 2$.

$$\boxed{y(x) = 2e^{3x^2/2}.}$$

Шаг 4. Не доверяем одному ответу: $y' = 2e^{3x^2/2} \cdot 3x = 3xy$, $y(0) = 2$. Формула определена на всей прямой, поэтому максимальное решение здесь глобально.

Следующая самостоятельная попытка

Реши $y' = -2xy$, $y(0) = 3$, записав четыре шага, а не копируя предыдущие строки. Для проверки: $y = 3e^{-x^2}$; производная равна $-6xe^{-x^2}$, что совпадает с $-2xy$. Если затруднение возникло раньше выбора метода, начни с производных в конце блока по доске и вычислительного приложения курса.

Новый маршрут: 22 ноября – 10 января

Предыдущие октябрьские недели больше не являются текущим расписанием. Сегодня — короткий старт, затем семь недель работы. Ориентир 10 января взят из старых материалов как срок закрепления, а не как подтверждённая дата экзамена. Новый первый проход 26 вопросов заканчивается 27 декабря; дополнительные главы старого курса — к 3 января; последняя неделя отведена проверке.

Честный бюджет

Старый план включал 58 ч 15 мин до первого прохода и ещё 9 часов закрепления, всего 67 ч 15 мин. Чтобы сохранить этот объём с сегодняшней даты, новый маршрут предусматривает 45 минут сегодня и 7 недель по 9 ч 30 мин. В каждой неделе: 8 часов основной работы и 1 ч 30 мин резерва. Всего основная работа — 56 ч 45 мин, резерв — 10 ч 30 мин.

Обычная неделя — пять занятий по 96 минут, без фиксированного часа. Можно делить на два подхода и переносить объём внутри недели. В праздничную неделю: 28–30 декабря по 130 минут, 31 декабря 30 минут, 2 января 60 минут. 1 и 3 января свободны. Резерв можно разделять на короткие подходы и использовать только при необходимости; он уже входит в итог.

Это расчёт требуемой нагрузки, а не предположение, что у тебя уже есть столько свободного времени. При меньшем бюджете сдвигается конец подготовки или сокращается дополнительная часть; нельзя обещать прежний объём вдвое быстрее. Если пропустил занятие, сначала используй резерв; если его мало, перенеси последующие пункты. Не удваивай следующий день автоматически.

Повторение и критерий перехода

В обычные 96 минут входят: 12 минут повторения, 39 минут новой темы, 30 минут практики, 10 минут самостоятельного ответа и 5 минут записи ошибки. Старую тему возвращай на следующем занятии, примерно через неделю и через три недели; выделенное время повторения уже включено. Длинное доказательство можно разделить между новой темой и резервом.

По каждому вопросу поставь четыре отдельные отметки: смысл, формулировка, доказательство, пример. Переходить дальше можно с записанным конкретным пробелом; назвать пробел решённым можно только после повторной самостоятельной попытки. В конце каждой недели проверь фактическое время и при необходимости пересчитай маршрут.

Неделя 1: 23.11–29.11. Определения и локальная теория

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

23.11.2026 · 96 минут · Вопросы фото 1–2; главы 1–2

Определи ОДУ и решение; построй изоклины для y′=−x/y; различи окружность и графиковую ветвь.

Проверка результата. Без текста объяснить область, порядок, поле, изоклину, особую точку. Практика А1–А3, Б1.

24.11.2026 · 96 минут · Вопрос фото 3; глава 3

Выведи три модели тетради: движение, разрушение клеток, гармонические колебания.

Проверка результата. Не перечислять готовые ответы: назвать допущение и получить уравнение. Практика Б3–Б4.

25.11.2026 · 96 минут · Вопрос фото 4; глава 4

Раздели теорему, достаточное условие Липшица и контрпримеры. Восстанови доказательство по Лагранжу.

Проверка результата. Объяснить, почему $|y|$ и $3|y|^{2/3}$ служат разным целям; проверить два решения.

26.11.2026 · 96 минут · Вопрос фото 5; глава 5

Докажи обе стороны интегральной эквивалентности. Вычисли четыре приближения Пикара.

Проверка результата. Верхний предел x; номер приближения не путать с производной. Практика А4–А6.

27.11.2026 · 96 минут · Вопрос фото 6; глава 6

Сформулируй Пеано и проверь оба примера с разрывной правой частью. Затем ответь по фото 1–6 без конспекта.

Проверка результата. Для каждого вопроса отдельно отметить смысл, формулировку, доказательство и пример.

Неделя 2: 30.11–06.12. Первый порядок и переход к системам

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

30.11.2026 · 96 минут · Вопрос фото 7; глава 8

Продолжение, максимальный интервал, выход из компактов. Сравни y′=y² на всей плоскости и y′=0 в x<1.

Проверка результата. Область обязательно назвать до вывода об асимптоте. Практика Б1–Б2.

01.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 8; глава 9

Восстанови доказательство через G^{-1}; явно проверь область обратной функции и начальное значение.

Проверка результата. Отдельно вернуть стационарные решения g(y)=0; не требовать g′ без необходимости.

02.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 9; глава 10

Выведи замену y=xu, интеграл и подобие. Проверь все корни F(k)=k.

Проверка результата. Прямая через нуль и допустимый полулуч различаются. Практика Б7.

03.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 10; главы 11–12

Определи нормальную систему, задачу Коши, ЛОС и ЛНС. Переведи уравнение третьего порядка в систему.

Проверка результата. Указать число начальных данных и объяснить существование на общем интервале непрерывности.

04.12.2026 · 96 минут · Повтор фото 7–10 и практика

Одна задача на разделение, одна на замену, одна на систему; затем два случайных вопроса из фото 1–6.

Проверка результата. Практика Б4, Б7, В1; после собственной попытки сверить ключ.

Неделя 3: 07.12–13.12. Линейная теория и вариация постоянных

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

07.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 11; глава 13

Кванторы зависимости; контрпример к обратной импликации; лемма для решений одной ЛОС.

Проверка результата. Объяснить, в какой строке используется единственность. Практика А8.

08.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 12; глава 14

ФСР, размерность, общее решение, переход $X \to XC$, нормированная фундаментальная матрица.

Проверка результата. Из $X(t_0)c=u_0$ получить все решения; проверить порядок множителей.

09.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 13; глава 15

На пустом листе раскрыть производную определителя 2×2 и получить $W'=\operatorname{tr}(A)W$.

Проверка результата. Доказательство не делит на W до разбора нулевого случая.

10.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 14; глава 16

Обе стороны структуры ЛНС; затем от $u=Xc(t)$ до $c'=X^{-1}f$.

Проверка результата. Самостоятельно получить решение системы $u'=\operatorname{diag}(1,-1)u+(1,1)^{T}$.

11.12.2026 · 96 минут · Вопросы фото 15–16; главы 17–18

Сопровождающая матрица, сохранение зависимости, скалярный Вронскиан; вывести две строки вариации.

Проверка результата. Решить $y''+y=1$ вариацией и проверить подстановкой. При необходимости использовать недельный резерв.

Неделя 4: 14.12–20.12. Постоянные коэффициенты и резонанс

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

14.12.2026 · 96 минут · Вопросы фото 17–18; главы 19–20

ФСР простых и кратных корней, Вандермонд, смещение, независимость экспоненциальных блоков.

Проверка результата. Выписать вещественную ФСР для $(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)$; проверить четыре постоянные.

15.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 19; глава 21

Доказательство через два обратимых полиномиальных оператора. Затем задача №1 пробника, оба варианта.

Проверка результата. Для каждого блока назвать μ, N, s и записать полный пробный вид.

16.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 20; глава 22

Построить ядро из диагональных условий, доказать формулу, решить обе задачи №2 пробника.

Проверка результата. Проверить $K(s,s)=0$, $K_x(s,s)=1$. Для tan x назвать интервал.

17.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 21; глава 23

Три случая спектра; собственные и присоединённые векторы; формула с факториалами и доказательство.

Проверка результата. Самостоятельно проверить пару решений для клетки [[2,1],[0,2]].

18.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 22; глава 24

Полностью восстановить отсутствующий ответ: нерезонансная рекурсия, жорданова оценка степени, два примера.

Проверка результата. Объяснить, почему степень «не выше» и почему кратность не заменяет размер клетки.

Неделя 5: 21.12–27.12. Автономные системы и устойчивость

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

21.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 23; глава 25

Определения, сдвиг, непересечение, повторная точка, минимальный период и равновесие.

Проверка результата. В доказательстве назвать единственность; различать решение во времени и его образ.

22.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 24; глава 26

Нарисовать седло, обычный, звёздный и неправильный узел, центр и фокус; затем сверить атлас.

Проверка результата. На каждом рисунке поставить стрелки, собственные направления и потерянные при делении оси.

23.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 25; глава 27

Кванторы устойчивости и неустойчивости; оценка для $z'=az$; замена $z=u-\varphi$.

Проверка результата. Для роста зафиксировать ε_0 и предъявить момент выхода. Разобрать равновесия $u'=1-u^2$.

24.12.2026 · 96 минут · Вопрос фото 26; глава 28

Сведение ЛНС к ЛОС; жордановы блоки; оценка матричной экспоненты; выбор δ.

Проверка результата. Восстановить оба доказательства достаточности, оборванные в тетради.

25.12.2026 · 96 минут · Первый проход всех 26 вопросов

Коротко пройти список 1–26 и отметить точные пробелы; решить задачу Коши из пробника без подсказок.

Проверка результата. Отметка «прочёл» не заменяет самостоятельное доказательство. Неразобранные пункты отправить в резерв.

Неделя 6: 28.12–03.01. Дополнения и исправление пробелов

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

28.12.2026 · 130 минут · Дополнение: глава 7

Линейное уравнение первого порядка и Бернулли; множитель, замена, области и нулевое решение. Повторить слабые места фото 1–10.

Проверка результата. Практика Б3, Б5; не навязывать эту главу как отдельный вопрос на новых фотографиях.

29.12.2026 · 130 минут · Дополнение: глава 29

Теорема первого приближения и её границы; три примера с нулевым линейным коэффициентом. Повторить фото 11–16.

Проверка результата. Различить отрицательный спектр, положительную часть и критический случай.

30.12.2026 · 130 минут · Дополнение: глава 30 и часть главы 18

Пуанкаре–Перрон, Лотка–Вольтерра, восстановление уравнения по ФСР. Повторить фото 17–22.

Проверка результата. Считать это сохранённым запасом старого курса, а не подтверждёнными снимками новыми требованиями.

31.12.2026 · 30 минут · Лёгкий устный повтор

За 30 минут восстановить кванторы и две схемы доказательств, которые чаще всего теряются.

Проверка результата. Новых тем нет. 1 января — выходной.

02.01.2027 · 60 минут · Практика и фото 23–26

Две задачи на устойчивость и портреты; затем журнал ошибок и повтор неудавшегося доказательства.

Проверка результата. 60 минут; 3 января — выходной.

Неделя 7: 04.01–10.01. Итоговая проверка

Основная работа: 8 часов; резерв: 1 час 30 минут.

04.01.2027 · 96 минут · Пробник: фото 1–6

Выбрать по одному примеру и восстановить все требуемые доказательства блока без подсказок. Затем первый порядок.

Проверка результата. Записать конкретный сбой, а не общую оценку «не знаю».

05.01.2027 · 96 минут · Пробник: фото 7–12

Продолжение, разделение, однородность, системы, зависимость и ФСР. Две практические задачи.

Проверка результата. Повторить сегодня только найденные ошибки.

06.01.2027 · 96 минут · Пробник: фото 13–18

Лиувилль, вариация, скалярная теория, простые и кратные корни.

Проверка результата. Каждый переход обосновать; не ограничиваться списком формул.

07.01.2027 · 96 минут · Пробник: фото 19–22

Резонанс, ядро, жордановы цепочки, векторный квазимногочлен. Самостоятельная №2 целиком.

Проверка результата. Сначала решить, потом открыть подробный разбор.

08.01.2027 · 96 минут · Пробник: фото 23–26 и дополнения

Автономность, портреты, определения устойчивости, критерий. Проверить дополнения глав 7, 29, 30.

Проверка результата. 9–10 января — резерв и отдых; новые темы не маскировать повторением.

Журнал одной ошибки

Записывай: дата; номер вопроса или задачи; точная строка, где остановился; что разрешает следующий переход; дата повторной попытки. Примеры категорий: область, потерянное решение, выбор метода, производная, интеграл, знак, константа, квантор, применение единственности. Одна точная запись полезнее перечня «повторить всё».

БИЛЕТ 1

Основные понятия: ОДУ, порядок, решение

Источники: Лекции: с. 1-2 PDF. Сборник Якуба: с. 6-9 PDF. Старый сборник: с. 6 PDF.

Объём ответа: Определения, формы записи и примеры. Доказательство отдельной теоремы не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 1

IMG_1948; главы 1.

Что требуется. Определения, разрешённая форма и примеры.

Решение задаётся вместе с интервалом: функция должна иметь нужные производные, её график должен лежать в области уравнения, а подстановка должна давать тождество. Порядок определяют по старшей действительно присутствующей производной, а не по степени функции.

На снимке есть $y' = \sin x/x$. Фраза «не решается» не должна означать отсутствие решения: при $x \neq 0$ имеем

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}\, ds.$$

Отсутствие элементарной первообразной не мешает существованию решения. Для исходной записи выбираем интервал без нуля; если отдельно определить правую часть в нуле равной 1, получим другую, продолженную постановку.

Проверка. $xy' - y = x^2$ при $x = 0$ нельзя механически делить на x. На $x > 0$ ответ $y = x^2 + Cx$; подстановка даёт $x(2x + C) - (x^2 + Cx) = x^2$.

Понять смысл

Дифференциальное уравнение описывает связь между неизвестной функцией и скоростью её изменения. Например, равенство $y' = 2y$ говорит: в каждой точке производная вдвое больше значения функции. Это ещё не задаёт одну функцию: подходят e^{2x}, $3e^{2x}$ и нулевая функция. Уравнение задаёт закон изменения, а дополнительные условия позволяют выбрать конкретное движение по этому закону.

Главное отличие от алгебраического уравнения состоит в объекте поиска. В равенстве $z^2 = 4$ ищут число; в равенстве $y' = 2y$ ищут функцию на интервале. Поэтому ответом служит не только формула, но и область, на которой она имеет смысл и удовлетворяет уравнению. Функция $y = \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$ и та же формула на $(-\infty, 0)$ задают разные решения в смысле «функция вместе с её интервалом».

В этом пособии приведены математически проверенные рабочие формулировки. Они передают содержание билетов сборника, но не являются дословными цитатами преподавателя.

Точная формулировка

Обыкновенное дифференциальное уравнение. ОДУ порядка n имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где искомая скалярная функция $y = y(x)$ зависит от одной независимой переменной, а старшая действительно входящая производная имеет порядок n. Функция F задана на некотором множестве допустимых значений своих аргументов. Слово «обыкновенное» отличает такое уравнение от уравнения в частных производных для функции нескольких переменных.

Порядок определяется производной, а не её степенью. Уравнение $(y')^5 + y = 0$ имеет первый порядок; $y'' + y = 0$ имеет второй. Если старшая производная умножена на коэффициент, обращающийся в нуль, поведение в таких точках нужно исследовать отдельно. Например, в $xy' = y$ коэффициент при y' равен нулю при $x = 0$: нормальная форма там недоступна.

Разрешённая форма. Уравнение называется разрешённым относительно старшей производной, если оно записано как

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Для первого порядка это $y' = f(x, y)$. Такая запись задаёт единственное значение производной для каждой допустимой пары (x, y). Неявное уравнение $(y')^2 + y^2 = 1$ в области $|y| < 1$ допускает два значения

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \qquad y' = -\sqrt{1 - y^2}.$$

Выбор одной ветви даёт новое, более конкретное уравнение; нельзя без пояснения заменить исходное уравнение только положительным корнем.

Решение. Функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$, где I есть интервал, называется решением ОДУ порядка n, если на I существуют все необходимые производные, аргументы выражения F принадлежат области его определения и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{для всех } x \in I.$$

Равенство должно выполняться тождественно, а не в нескольких проверенных точках. В стандартной ситуации непрерывной правой части разрешённого уравнения решение имеет непрерывную старшую производную. Для обсуждения разрывных правых частей в билете 6 отдельно различим простую дифференцируемость и принадлежность классу C^1.

График $\{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$ называется интегральной кривой скалярного уравнения. Ограничение решения на меньший интервал тоже является решением. Если решение нельзя расширить на больший интервал, сохранив уравнение и прежние значения, его называют максимальным; точное определение будет в билете 8.

Как проверять и записывать решения

Надёжная проверка состоит из четырёх шагов.

1. Указать интервал I и проверить допустимость выражений: знаменателей, корней, логарифмов, степеней.
2. Вычислить производные до требуемого порядка.
3. Подставить в исходное уравнение и получить тождество на всём I.
4. Если заданы начальные условия, проверить каждое из них отдельно.

Проверка найденной функции доказывает, что она является решением. Она сама по себе не доказывает, что найдены все решения. Чтобы назвать семейство общим решением, нужно дополнительно обосновать его полноту.

Константа интегрирования существенна: из $y' = \cos x$ получается семейство $y = \sin x + C$, а не только $y = \sin x$. У уравнения второго порядка обычно появляются две независимые постоянные, но подсчёт постоянных не заменяет теорему о структуре решений. Особенно осторожно нужно обращаться с неявными и вырожденными уравнениями.

Отсутствие элементарной первообразной не означает отсутствия решения. При $x_0 > 0$ задача

$$y' = \frac{\sin x}{x}, \qquad y(x_0) = y_0$$

имеет решение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}\, ds, \qquad x > 0.$$

Это полноценный точный ответ. Подынтегральная функция непрерывна, поэтому производная интеграла совпадает с ней. Если требуется включить нуль, сначала нужно явно доопределить правую часть значением 1; исходная дробь в нуле не определена.

Пример: проверка семейства и вырожденной точки

Рассмотрим

$$xy' - y = x^2.$$

Предлагается семейство $y = x^2 + Cx$. Вычисляем $y' = 2x + C$ и подставляем:

$$x(2x + C) - (x^2 + Cx) = x^2.$$

Следовательно, каждая такая функция решает исходное уравнение на всей $\mathbb{R}$. Если переписать его как $y' = \frac{y}{x} + x$, новая запись имеет смысл только при $x \neq 0$. На каждом из интервалов $x > 0$ и $x < 0$ можно получить семейство непосредственно:

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = 1, \qquad \frac{y}{x} = x + C.$$

Именно исходное равенство позволило затем проверить решение в нуле. Нельзя считать, что деление на x доказало что-либо в точке $x = 0$.

Если решение дифференцируемо на интервале, содержащем нуль, то слева и справа формально могли бы появиться постоянные C_- и C_+. В нуле исходное уравнение требует $y(0) = 0$, а существование производной требует $C_- = C_+$. Так объясняется, почему допустимое склеивание вновь приводит к одному C. Это небольшой пример того, как область и гладкость дополняют вычисления.

Почему проверка в одной точке недостаточна

Пусть для уравнения $y' = 2y$ предложена функция $\varphi(x) = x^2$. В точке $x = 0$ действительно $\varphi'(0) = 0 = 2\varphi(0)$. Однако на всём интервале требовалось бы тождество $2x = 2x^2$, которое неверно. Совпадение в одной точке говорит лишь о подходящем наклоне в этой точке. Аналогично, совпадение нескольких первых производных двух функций в начале не означает их совпадения на интервале.

Ещё одна полезная проверка касается слов «уравнение» и «решение». Запись $y' = 2y$ есть требование к неизвестной функции. Запись $y = e^{2x}$ есть конкретная функция, которую надо проверить. Запись $y = Ce^{2x}$ есть семейство функций. Наконец, $y(0) = 3$ есть дополнительное условие, выбирающее член семейства с $C = 3$. Если уверенно различать эти четыре объекта, дальнейшие определения задачи Коши, общего решения и метода вариации постоянных будут значительно понятнее.

Ответ у доски

Сначала сказать, что ищется функция одной переменной, и записать общий вид ОДУ порядка n. Затем определить порядок и решение на интервале, подчёркивая тождество после подстановки. После этого выписать нормальную форму и привести три коротких примера: первое уравнение, второе уравнение и неявное уравнение с двумя ветвями производной. Закончить проверкой одной функции и замечанием, что решение может быть задано определённым интегралом.

Проверка себя

1. Каков порядок уравнения $(y'')^3 + y' = x$? Разрешено ли оно относительно старшей производной в записанном виде?
2. Проверьте $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ для $y'' + y = 0$ и найдите постоянные из $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.
3. На каких максимальных интервалах формула $y = \frac{1}{1-x}$ задаёт решение $y' = y^2$? Какой интервал относится к условию $y(0) = 1$?

Ответы. 1. Второй порядок; в записанном виде не разрешено, но действительный кубический корень позволяет выразить $y'' = \sqrt[3]{x - y'}$. 2. После двух дифференцирований $y'' = -y$; $C_1 = 2$, $C_2 = -3$. 3. Интервалы $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$; условию при нуле соответствует первый.

Частые ошибки

Путают порядок со степенью; забывают интервал; считают проверку в одной точке доказательством; делят на выражение, способное обращаться в нуль; объявляют интеграл без элементарной первообразной «нерешаемым уравнением». Полезная привычка: рядом с каждым ответом писать область и одну строку подстановки.

БИЛЕТ 2

Геометрическая интерпретация и основные определения

Источники: Лекции: с. 2-11 PDF. Сборник Якуба: с. 10-13 PDF. Старый сборник: с. 7-9 PDF.

Объём ответа: Поле направлений, изоклины, особые точки, интегральные кривые, интеграл и общее решение; объяснение на примерах.

Доработка по фотографиям: вопрос 2

IMG_1949–IMG_1952; главы 2.

Что требуется. Поле и расширенное поле направлений, изоклины, особая точка, интегральная кривая и общий интеграл.

Для $y' = f(x, y)$ изоклина наклона k задаётся $f(x, y) = k$. Для дробной записи $y' = P/Q$ удобнее направление вектора (Q, P): там, где $Q = 0$, $P \neq 0$, оно вертикально. Общий нуль $P = Q = 0$ требует отдельного исследования; после сокращения общего множителя область исходного уравнения автоматически не расширяется.

Пример со снимка: $y' = -x/y$. Изоклины удовлетворяют $-x/y = k$, а интеграл равен $x^2 + y^2 = C$. В начале координат расширенное поле не определено, в остальных точках оно задано вектором $(y, -x)$. Окружность является целой интегральной кривой расширенного поля, но не графиком одной функции $y(x)$: графиковые ветви имеют вид $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ и исключают точки $y = 0$ исходной дроби.

Общее решение в явном виде и общий интеграл в неявном виде должны охватывать все локальные решения рассматриваемой области. После деления на выражение, которое может обратиться в нуль, отдельно возвращаем потерянные ветви.

Понять смысл

Равенство $y' = f(x, y)$ можно читать без нахождения формулы $y(x)$. В каждой точке (x, y) известно, какой наклон должна иметь проходящая через неё интегральная кривая. Если $f = 0$, касательная горизонтальна; если $f > 0$, решение локально возрастает; если $f < 0$, убывает. Соседние короткие отрезки показывают возможное поведение решения и помогают обнаружить ошибку в вычислениях.

Геометрическая картина не заменяет условий теорем. Нарисовать одну плавную кривую через точку ещё не значит доказать, что другой нет. Для единственности понадобятся условия билета 4. Кроме того, график функции $y(x)$ нужно отличать от параметрической кривой на плоскости: полная окружность не является графиком одной функции от x.

Точная формулировка

Поле направлений и изоклина. Пусть f определена на области $D \subset \mathbb{R}^2$. Полем направлений уравнения называется сопоставление точке $(x, y) \in D$ прямой с направляющим вектором

$$(1, f(x, y)).$$

Угол α этой прямой с положительным направлением оси x удовлетворяет $\tan\alpha = f(x, y)$; направление прямой понимается с точностью до добавления π. Изоклина наклона k есть множество

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}.$$

Это множество не обязано быть одной прямой или одной связной кривой. Изоклина показывает одинаковые наклоны, но обычно сама не является интегральной кривой.

Интегральная кривая. Для скалярного уравнения в нормальной форме интегральная кривая есть график его решения. Условие касания поля равносильно равенству $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Внутри области непрерывной конечной правой части такой график не имеет вертикальной касательной с бесконечным наклоном.

Особая точка: важное различие. Для геометрического поля направлений изолированной особой точкой называют точку, где направление не определено, хотя определено во всей достаточно малой проколотой окрестности. Часто поле задают вектором $(P(x, y), Q(x, y))$ или соотношением

$$P(x, y)\,dy - Q(x, y)\,dx = 0.$$

Там, где $P \neq 0$, получается $y' = \frac{Q}{P}$. При $P = 0$, $Q \neq 0$ геометрическое направление вертикально и вполне определено, но нормальная скалярная запись уже неприменима. Точка $P = Q = 0$ может быть особой; для изолированности надо проверить отсутствие других общих нулей поблизости.

Поэтому разрыв дроби и особая точка полного поля не одно и то же. У $y' = -\frac{x}{y}$ исключена вся прямая $y = 0$, а у геометрического поля $(y, -x)$ единственная особая точка есть $(0, 0)$. Называть начало координат единственной точкой неопределённости самой дроби было бы неверно.

Интеграл, первый интеграл, общее решение. В терминологии рассматриваемого билета интегралом называется неявное соотношение $\Phi(x, y) = 0$, задающее интегральную кривую или её подходящую графическую ветвь. Чтобы извлечь график, обычно достаточно условия $\Phi_y \neq 0$. Отдельно употребляется термин «первый интеграл»: это функция $H(x, y)$, постоянная вдоль решений. Для $H \in C^1$ достаточна проверка

$$H_x(x, y) + f(x, y)H_y(x, y) = 0.$$

Действительно, производная $H(x, y(x))$ по правилу цепочки равна левой части. Уровни $H = C$ затем дают интегральные кривые там, где они допускают нужные графические ветви.

Общее решение в рассматриваемой области есть семейство $y = \varphi(x, C)$, члены которого являются решениями и которое описывает все решения в этой области с учётом ограничений на интервалы. Общий интеграл есть аналогичное неявное семейство $\Phi(x, y, C) = 0$. Фраза

«все решения» требует проверки: при делении на y часто теряется решение $y \equiv 0$. В задачах с неединственностью простое однопараметрическое семейство вообще может не охватывать все возможные склеивания.

Как строить качественную картину

1. Сначала найти область определения. Не дорисовывать решение через исключённую линию только потому, что рисунок кажется гладким.
2. Найти нулевую изоклину $f = 0$ и несколько уровней $f = k$, например $k = 1, -1$.
3. Отметить знаки f в оставшихся областях и наклоны на изоклинах.
4. Если известен первый интеграл, исследовать его уровни, выбрать допустимые ветви.
5. Проверить полученное описание подстановкой или дифференцированием неявного равенства.

Для $y' = x + y$ изоклины имеют вид $y = -x + k$. Нулевая изоклина $y = -x$ не есть решение: производная этой прямой равна -1, тогда как правая часть на ней равна нулю. Она лишь показывает места горизонтальных касательных возможных решений.

Пример: окружности и графические ветви

Для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0,$$

умножаем равенство на y и получаем

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2yy' = 0.$$

Следовательно, $H = x^2 + y^2$ является первым интегралом. Уровень $H = R^2$, где $R > 0$, даёт два максимальных графических решения:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad y = -\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R < x < R.$$

Именно открытые верхняя и нижняя полуокружности служат графиками решений. Точки $(\pm R, 0)$ не входят в область исходного уравнения. В этих точках производная ветви не конечна, так что объединить полуокружности в одно классическое решение $y(x)$ нельзя.

Если вместо скалярного уравнения рассмотреть систему $\dot{u}_1 = u_2$, $\dot{u}_2 = -u_1$, где точка означает производную по t, то полные окружности будут её фазовыми траекториями. Здесь координаты зависят от отдельного параметра времени, поэтому запрета на две разные ординаты при одной абсциссе нет. Такое различие понадобится в билетах об автономных системах.

Для конечного k изоклины удовлетворяют $-\frac{x}{y} = k$. При $k = 0$ это $x = 0$, $y \neq 0$; при $k \neq 0$ это $y = -\frac{x}{k}$ с исключением нуля. В геометрически продолженном поле направление вертикально на $y = 0$, $x \neq 0$.

Ещё один пример: лучи

У $y' = \frac{y}{x}$ область есть $x \neq 0$. Проверка

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = 0$$

даёт $y = Cx$. На $x > 0$ и $x < 0$ получаем отдельные лучи без начала координат. Здесь каждая изоклина $y = kx$ одновременно является решением: её собственный наклон k совпадает с наклоном поля. Это особенность данного примера, а не общее свойство изоклин. Полное поле (x, y) имеет изолированную особую точку в начале координат, тогда как дробь $\frac{y}{x}$ не определена на всей оси $x = 0$.

Как читать наклоны и неявные уровни

Для $y' = y$ нулевая изоклина совпадает с горизонтальной осью. Выше неё наклоны положительны, ниже отрицательны; на одной горизонтальной прямой все наклоны равны. Формула $y = Ce^x$ согласуется с рисунком: положительное решение возрастает, отрицательное убывает, а нулевое остаётся на оси. Две соседние положительные кривые могут визуально сближаться слева, но не пересекаются в конечной точке. Последнее утверждение позднее будет следовать из единственности задачи Коши.

У неявного уровня полезно проверять производную по y. Если $H(x, y) = C$ и $H_y \neq 0$, то локально

$$y' = -\frac{H_x}{H_y}.$$

Для $H = x^2 + y^2$ получается $y' = -\frac{x}{y}$, но только при $y \neq 0$. В точках уровня с $y = 0$ знаменатель исчезает: именно там перестаёт работать описание окружности как гладкого графика $y(x)$. Это не вычислительная случайность, а точное согласование аналитического условия с геометрией вертикальной касательной.

Ответ у доски

Объяснить равенство $\tan\alpha = f(x, y)$, определить поле направлений и изоклину. Сформулировать понятия графика решения, общего решения и общего интеграла. Дать определение изолированной особой точки с уточнением, какое поле рассматривается. Затем разобрать $y' = -\frac{x}{y}$: первый интеграл, две ветви, область и отличие от полной фазовой окружности. Если остаётся время, противопоставить изоклины $y' = x + y$ и $y' = \frac{y}{x}$.

Проверка себя

1. Найдите изоклины $y' = xy$ для наклонов 0 и 1.
2. Является ли прямая $y = x$ изоклиной и решением $y' = x - y$?
3. Проверьте, что $H(x, y) = ye^{-x}$ есть первый интеграл $y' = y$. Выпишите общий интеграл и общее решение.

Ответы. 1. Для нулевого наклона $xy = 0$, то есть обе координатные оси; для наклона 1 гипербола $xy = 1$. 2. Это нулевая изоклина, но не решение, потому что $1 \neq 0$. 3.

$H_x + yH_y = -ye^{-x} + ye^{-x} = 0$; общий интеграл $ye^{-x} = C$, общее решение $y = Ce^x$.

Частые ошибки

Считают любую изоклину решением; рисуют целую окружность как график $y(x)$; путают вертикальное направление с неопределённым; называют все точки исключённой прямой одной «изолированной особой точкой»; забывают проверку полноты семейства. Грамотный рисунок начинается с области определения и подписи осей.

БИЛЕТ 3

Физические задачи, приводящие к ОДУ

Источники: Лекции: с. 12-14 PDF (колебания и распад). Сборник Якуба: с. 14-16 PDF; охлаждение Ньютона добавлено в сборнике на с. 16.

Объём ответа: Поставить физические задачи, получить уравнения и решить их; отдельная абстрактная теорема не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 3

IMG_1953; главы 3.

Что требуется. Смысл переменных, вывод уравнения и решение трёх моделей.

В тетради выбраны три модели. Для движения $S' = V(t)$ с известной непрерывной скоростью:

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^{t} V(s)\,ds.$$

Для разрушения клеток предположение «за малое время погибает доля, пропорциональная числу живых» даёт $N' = -\kappa N$, $\kappa > 0$, откуда $N = N_0 e^{-\kappa(t-t_0)}$. Постоянная имеет размерность обратного времени; отрицательный знак описывает убывание.

Для гармонического осциллятора $mx'' = -kx$, $m, k > 0$, поэтому $x'' + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{k/m}$ и

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Форма $A\cos(\omega t + \varphi)$ эквивалентна, но при $A = 0$ фаза не определяется. Начальные условия удобнее накладывать на форму с C_1, C_2.

Понять смысл

Моделирование начинается со слов «какая величина меняется и по какому закону», а не с угадывания знакомого уравнения. Производная означает мгновенную скорость изменения; вторая производная координаты означает ускорение. Пропорциональность вводит коэффициент с определённой размерностью, а физическое направление процесса определяет знак.

Чтобы сохранить единые обозначения скалярных уравнений, в этом билете время обозначаем x, а изменяющуюся величину обозначаем $y(x)$. Для каждой модели заново поясняем смысл y. Это лишь смена букв: физические законы не зависят от обозначений. Во всех трёх примерах начало отсчёта времени выбрано при $x = 0$, а физическое наблюдение обычно ведётся при $x \geq 0$.

Хороший ответ включает четыре части: предположения модели, уравнение с начальными данными, решение, проверку физического смысла. Нужно объяснить не только полученную формулу, но и почему она описывает именно поставленную ситуацию.

Модель 1: радиоактивный распад

Пусть $y(x)$ означает количество нераспавшегося вещества. В непрерывной модели предполагается, что за малый промежуток времени доля распада приблизительно пропорциональна его длительности, а коэффициент распада постоянен. Поэтому

$$y' = -\lambda y, \qquad \lambda > 0, \qquad y(0) = y_0 \geq 0.$$

Минус отражает уменьшение количества; размерность λ есть обратное время. Формула для средней макроскопической величины не утверждает, что отдельные атомы распадаются плавно.

Если $y_0 > 0$, разделяем переменные на участке, где $y > 0$:

$$\frac{y'}{y} = -\lambda, \qquad \ln y = -\lambda x + C_1, \qquad y = Ce^{-\lambda x}.$$

Из начального условия $C = y_0$, откуда

$$y(x) = y_0 e^{-\lambda x}.$$

При $y_0 = 0$ имеется решение $y \equiv 0$, которое проверяется отдельно после деления на y. Оно также включено в итоговую формулу. Подстановка даёт $y' = -\lambda y_0 e^{-\lambda x} = -\lambda y$. При $x \geq 0$ количество неотрицательно, убывает при $y_0 > 0$ и стремится к нулю, не достигая его за конечное время.

Период полураспада. Число $T_{1/2} > 0$ определяется условием $y(T_{1/2}) = \frac{y_0}{2}$ при $y_0 > 0$. Тогда

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}, \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \qquad y(x) = y_0\, 2^{-\frac{x}{T_{1/2}}}.$$

Период полураспада не зависит от начального количества. Если он равен 3 часам, то спустя 9 часов останется $\frac{y_0}{8}$, а не нуль. Экспоненциальное убывание нельзя заменить линейным вычитанием одинаковых количеств через одинаковые интервалы.

Модель 2: свободные гармонические колебания

Пусть $y(x)$ есть смещение груза массы $m > 0$ от положения равновесия. Груз соединён с пружиной жёсткости $k > 0$, движение одномерное, трения и внешней силы нет, а закон Гука считается применимым. Восстанавливающая сила направлена против смещения:

$$F = -ky.$$

По второму закону Ньютона $my'' = F$, поэтому

$$my'' + ky = 0, \qquad y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0.$$

Это уравнение второго порядка. Для конкретного движения требуются два начальных условия: положение $y(0) = y_0$ и скорость $y'(0) = v_0$.

Функции $\cos(\omega x)$ и $\sin(\omega x)$ при двукратном дифференцировании умножаются на $-\omega^2$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Полнота этой формулы будет обоснована общей линейной теорией; здесь можно непосредственно проверить и уравнение, и любые начальные данные. Дифференцируем:

$$y' = -\omega C_1 \sin(\omega x) + \omega C_2 \cos(\omega x).$$

Следовательно, $C_1 = y_0$, $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ и

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega x).$$

При отпускании из покоя $v_0 = 0$. Период ненулевого движения равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а амплитуда равна

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Если оба начальных значения нулевые, груз остаётся в равновесии; говорить о наименьшем положительном периоде этого постоянного решения некорректно.

Проверка через энергию. Механическая энергия

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}(y')^2 + \frac{k}{2}y^2$$

постоянна, поскольку

$$\mathcal{E}' = my'y'' + kyy' = y'(my'' + ky) = 0.$$

Это объясняет неизменность амплитуды. Если в ответе без трения появилась затухающая экспонента, стоит проверить постановку: она соответствует другой модели. При $m = 1$, $k = 4$, $y_0 = 1$, $v_0 = 2$ имеем $\omega = 2$ и $y = \cos 2x + \sin 2x$, амплитуду $\sqrt{2}$ и период π.

Модель 3: охлаждение Ньютона

Пусть $y(x)$ означает температуру тела, а y_s есть постоянная температура окружающей среды. Предполагается, что температура внутри тела описывается одной величиной, среда не меняется и коэффициент теплообмена $k > 0$ постоянен. Скорость изменения температуры пропорциональна разности температур с противоположным знаком:

$$y' = -k(y - y_s), \qquad y(0) = y_0.$$

Введём $z = y - y_s$. Поскольку y_s постоянно, имеем $z' = y'$ и получаем $z' = -kz$. Значит,

$$y(x) = y_s + (y_0 - y_s)e^{-kx}.$$

При $y_0 > y_s$ тело остывает; при $y_0 < y_s$ нагревается. Если $y_0 = y_s$, температура постоянна. Знак разности $y - y_s$ сохраняется, и в рамках этой модели температура среды не пересекается.

Пусть среда имеет температуру 20, начальная температура равна 80, а через 10 минут измерено 50 в одной и той же температурной шкале. Тогда

$$50 - 20 = (80 - 20)e^{-10k}, \qquad k = \frac{\ln 2}{10} \text{ мин}^{-1}.$$

Через 20 минут получим $y(20) = 20 + \frac{60}{4} = 35$. Чтобы найти время достижения температуры 25, решаем

$$5 = 60e^{-kx}, \qquad x = \frac{10 \ln 12}{\ln 2} \text{ мин}.$$

В логарифме возникает отношение температурных разностей, то есть безразмерное число. Если температура среды меняется со временем, замена $z = y - y_s(x)$ даёт $z' = y' - y_s'(x)$: прежняя формула без поправки уже не подходит.

Параметры, начальные данные и размерности

Постоянный параметр модели и произвольная постоянная решения играют разные роли. Коэффициент распада λ задаётся свойствами процесса; постоянная C в $Ce^{-\lambda x}$ выбирается начальным количеством. Жёсткость k и масса m определяют частоту пружины; C_1, C_2 выбирают конкретное движение той же пружины. Если неизвестен параметр, для его определения нужны дополнительные измерения, а не ещё одна произвольная постоянная интегрирования.

Например, если для распада известны два положительных измерения $y(x_1)$ и $y(x_2)$ при $x_2 > x_1$, то

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} = e^{-\lambda(x_2 - x_1)}, \qquad \lambda = \frac{\ln\left(\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\right)}{x_2 - x_1}.$$

Для охлаждения ту же формулу применяют к разности $y - y_s$, сохраняя её знак или беря модули обеих разностей. Подставлять сами температуры вместо разностей нельзя.

Аргументы экспоненты, синуса и косинуса должны быть безразмерными. Поэтому λ и коэффициент теплообмена имеют размерность обратного времени, а ω также измеряется в обратных единицах времени. Отношение $\frac{v_0}{\omega}$ имеет размерность смещения, что дополнительно проверяет формулу колебаний. Буква k в двух моделях обозначает разные физические параметры, а не одну общую константу.

Как решать задачи и отвечать у доски

Сначала назвать искомую величину и единицы. Затем объяснить знак, постоянные и ограничения модели. Записать начальные данные до интегрирования: это помогает понять, сколько постоянных требуется. После вычислений проверить решение подстановкой и исследовать хотя бы начальное значение и поведение при больших временах. Для второго порядка дополнительно проверить начальную скорость.

В устном ответе разумно подробно вывести распад и колебания, затем показать, что охлаждение сводится к распаду разности температур. Однако третий пример нельзя просто назвать: нужно выписать замену, решение и его смысл. Колебания и распад разобраны в лекционных записях; охлаждение дополнительно приведено в сборнике Якуба. Все три модели соответствуют тематике билета. Приоритет текущего устного требования преподавателя сохраняется, но расширять ответ случайным перечнем других моделей не нужно.

Проверка себя

1. За 4 часа количество вещества уменьшается вдвое. Какая доля останется через 12 часов и чему равна λ?
2. Решите $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. Найдите амплитуду и период.
3. Тело имеет начальную температуру 10, среда 30, коэффициент $k = \frac{1}{5}$ в обратных минутах. Запишите температуру и определите знак производной.

Ответы. 1. Останется $\frac{1}{8}$; $\lambda = \frac{\ln 2}{4}$ в обратных часах. 2. $y = 2\sin 3x$, амплитуда 2, период $\frac{2\pi}{3}$. 3. $y = 30 - 20e^{-\frac{x}{5}}$, $y' = 4e^{-\frac{x}{5}} > 0$: тело нагревается.

Частые ошибки

Теряют минус у распада и охлаждения; путают частоту ω с периодом; забывают делить начальную скорость на ω; используют одно условие для определения двух постоянных; делят на нулевую величину и теряют равновесие; смешивают часы и минуты. Физический смысл является самостоятельной проверкой: масса вещества не должна самопроизвольно расти в модели распада, а незатухающая пружина не должна терять энергию.

БИЛЕТ 4

Задача Коши и теорема Коши-Липшица

Источники: Лекции: с. 14-21 PDF. Сборник Якуба: с. 17-20 PDF. Старый сборник: с. 10-11 PDF.

Объём ответа: Сформулировать теорему; доказать достаточность ограниченной производной для условия Липшица; показать, что условие Липшица слабее. Полное доказательство теоремы существования не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 4

IMG_1954–IMG_1957; главы 4.

Что требуется. Задача Коши; теорема; достаточные условия Липшица с доказательством; два разных контрпримера.

На прямоугольнике $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ непрерывность f даёт $M = \max|f|$. При условии Липшица по y с одной общей константой L решение задачи Коши существует и единственно на $|x - x_0| \le h$, где $h = \min(a, b/M)$; при $M = 0$ берём $h = a$.

Если f_y существует и $|f_y| \le L$ на прямоугольнике, теорема Лагранжа по переменной y даёт

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f_y(x, \eta)|\,|y_2 - y_1| \le L|y_2 - y_1|.$$

Непрерывность f_y на компакте — удобное достаточное условие её ограниченности. Обратное неверно: $f = |y|$ липшицева с $L = 1$, хотя производной в нуле нет.

Для отсутствия единственности используем другой пример: $y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$. И $y = 0$, и $y = x^3$ решают задачу. Можно также взять $y_a = 0$ при $x \le a$ и $(x - a)^3$ при $x > a$, $a \ge 0$. В точке склейки производная равна нулю. Отсутствие f_y само по себе ещё ничего не доказывает; нужны действительно разные решения.

Понять смысл

Уравнение задаёт закон изменения, а начальное условие выбирает точку, через которую должен пройти график. Два вопроса принципиально различаются: существует ли такой график и может ли их быть несколько? Теорема Коши-Липшица даёт удобные достаточные условия положительного ответа на первый вопрос и отрицательного на второй.

Например, задача $y' = y$, $y(0) = 1$ имеет решение e^x. Но умение угадать эту функцию не объясняет, почему другого решения нет. Напротив, для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ нулевая функция является решением, однако не единственным. У обоих уравнений правая часть непрерывна. Значит, одной непрерывности для единственности недостаточно.

Точная формулировка

Задача Коши. Для уравнения $y' = f(x, y)$ задача Коши состоит в нахождении решения на интервале, содержащем x_0, которое удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$. Начальная точка

(x_0, y_0) должна принадлежать области определения правой части.

Условие Липшица по зависимой переменной. Рассмотрим прямоугольник

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}, \qquad a, b > 0.$$

Функция f удовлетворяет в нём условию Липшица по y, равномерно по x, если существует одно число $L \ge 0$ такое, что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

для всех допустимых x, y_1, y_2. Порядок кванторов существенен:

$$\exists L \ge 0 \quad \forall x \quad \forall y_1, y_2.$$

Разрешить выбирать новое L для каждой пары означало бы почти лишить условие содержания. Также сравниваются значения при одном и том же x: условие относится к y, а не обязательно к двум переменным одновременно.

Теорема Коши-Липшица. Пусть f непрерывна на R и удовлетворяет там условию Липшица по y. Обозначим

$$M = \max_R |f|, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

при $M > 0$; при $M = 0$ положим $h = a$. Тогда задача Коши имеет решение при $|x - x_0| \le h$, график которого лежит в R, и это решение единственно среди решений задачи, остающихся в R. На концах отрезка производные понимаются односторонне; обычное двустороннее утверждение относится к его внутренности.

Удобная локальная версия: если f непрерывна в открытой области D и локально липшицева по y, равномерно по x в достаточно малых прямоугольниках, то через каждую точку D проходит единственное локальное решение. Совпадение решений с одинаковыми начальными данными продолжается на их общем интервале определения.

Число h есть гарантированный, а не обязательно максимальный размер интервала. Оценка $|y'| \le M$ даёт $|y(x) - y_0| \le M|x - x_0|$, поэтому за время h решение не успевает выйти за горизонтальные стороны прямоугольника. Полный интервал существования иногда намного больше.

Доказательство достаточного условия Липшица

Предположим, что для каждого фиксированного x функция $y \mapsto f(x, y)$ непрерывна на соответствующем отрезке, дифференцируема внутри него и

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le L$$

с одним и тем же L для всех рассматриваемых x, y. Возьмём любые $y_1 \ne y_2$. По теореме Лагранжа о среднем существует ξ между ними, для которого

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2).$$

Поскольку весь вертикальный отрезок между точками лежит в прямоугольнике, оценка производной применима в точке (x, ξ). Следовательно,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)|\,|y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|.$$

При $y_1 = y_2$ неравенство очевидно. Условие Липшица доказано.

В частности, если f_y непрерывна в окрестности начальной точки, то на достаточно малом замкнутом прямоугольнике она ограничена по теореме Вейерштрасса. Это даёт локальную липшицевость. Непрерывность производной на неограниченной области сама по себе не даёт единой глобальной границы: например, для $f = y^2$ производная $2y$ не ограничена на всей плоскости.

Почему условие Липшица слабее

Возьмём $f(x, y) = |y|$. Обратное неравенство треугольника даёт

$$\big||y_1| - |y_2|\big| \le |y_1 - y_2|.$$

Поэтому $L = 1$ подходит на всей плоскости. Между тем производная по y в нуле не существует: правое разностное отношение равно 1, левое равно -1. Значит, липшицевость не требует существования ограниченной производной в каждой точке. Слова «слабее» здесь означают точное логическое отношение: условие на производную влечёт Липшиц, а обратное утверждение неверно.

Есть и другое важное различие. Невыполнение условия Липшица не доказывает неединственность. Оно означает лишь, что эта достаточная теорема не даёт ответа. Например, непрерывная функция $1 + \sqrt{|y|}$ не липшицева в нуле, но нигде не обращается в нуль. Для автономного уравнения $y' = 1 + \sqrt{|y|}$ локальная единственность следует из обратимости интеграла $\int \frac{du}{1+\sqrt{|u|}}$; это доказательство разберём в билете 9.

Пример: как действительно доказать неединственность

Для задачи

$$y' = |y|^{\frac{2}{3}}, \qquad y(0) = 0$$

неравенство Липшица с $y_2 = 0$ потребовало бы

$$|y|^{\frac{2}{3}} \le L|y|, \qquad |y|^{-\frac{1}{3}} \le L \quad (y \neq 0),$$

что невозможно при $y \to 0$. Теперь требуется самостоятельное доказательство неединственности, то есть предъявление разных решений.

Нулевая функция подходит. Кроме того, для каждого $c \ge 0$ подходит функция ожидания

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le c, \\ \dfrac{(x-c)^3}{27}, & x \ge c. \end{cases}$$

При $x < c$ обе части уравнения нулевые. При $x > c$ производная равна $\frac{(x-c)^2}{9}$, и правая часть имеет то же значение. В точке склейки функция и производная совпадают с нулём с обеих сторон. Все эти решения удовлетворяют начальному условию и различаются после соответствующего времени ожидания. Имеется бесконечно много решений, а кривая $\frac{x^3}{27}$ является кубической, не параболой.

Как применять теорему

Для $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$ возьмём $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. На нём $|f| \le 2$, а $|f_y| = |2y| \le 2$. Значит, можно взять $M = 2$, $L = 2$, $h = \frac{1}{2}$. Получена гарантия единственного решения хотя бы при $|x| \le \frac{1}{2}$. Ни формула решения, ни максимальный интервал пока не найдены, и теорема этого не обещает.

Общий алгоритм: проверить начальную точку; выбрать прямоугольник внутри области; проверить непрерывность; найти липшицеву оценку или ограниченную производную; сформулировать именно локальный вывод. Если требуется весь интервал, нужен отдельный аргумент продолжения или явная формула.

Пример без производной правой части в нуле

Решим $y' = |y|$, $y(x_0) = y_0$. Если $y_0 > 0$, кандидат $y = y_0 e^{x - x_0}$ остаётся положительным и удовлетворяет $y' = y = |y|$. Если $y_0 < 0$, кандидат $y = y_0 e^{-(x - x_0)}$ остаётся отрицательным и удовлетворяет $y' = -y = |y|$. При $y_0 = 0$ подходит $y \equiv 0$. Получились решения для любых начальных данных на всей прямой.

Почему через нуль нельзя присоединить ненулевую экспоненту после ожидания? Для этого уравнения действует глобальная липшицева оценка с $L = 1$, поэтому единственность исключает такое присоединение. Даже без теоремы ненулевая экспонента не достигает нуля в конечной точке. Этот пример полезно сопоставить с кубической ветвью $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$: обе правые части непрерывны, но лишь первая достаточно контролирует разности значений около нуля. Отсутствие производной самой функции $|y|$ в одной точке этому контролю не мешает.

Ответ у доски

Определить задачу Коши. Записать прямоугольник и условие Липшица с одним L. Сформулировать теорему, пояснить M и h. Доказать достаточность ограниченной производной через теорему Лагранжа. Привести $|y|$ как пример липшицевой недифференцируемой функции. В завершение показать две разные функции для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$ и подчеркнуть, что неединственность подтверждена подстановкой, а не одним отказом условия теоремы.

Проверка себя

1. Найдите константу Липшица для $f(x, y) = \sin x + 3y$ на всей плоскости.
2. Выполняются ли условия локальной теоремы для $y' = y^2$ в точке $(0, 100)$? Следует ли отсюда существование на всей $\mathbb{R}$?
3. Почему $f(y) = \sqrt{|y|}$ не липшицева около нуля? Доказывает ли это само по себе неединственность?

Ответы. 1. $L = 3$. 2. Да, поскольку $2y$ ограничена на любом малом прямоугольнике; глобальный вывод не следует. 3. Отношение $\frac{|f(y) - f(0)|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$ неограниченно; нет, нужны отдельные решения или другой аргумент.

Частые ошибки

Меняют местами кванторы; проверяют липшицевость по неправильной переменной; забывают модуль у $y_1 - y_2$; считают локально ограниченную производную глобально ограниченной; из неприменимости теоремы делают вывод об отсутствии или неединственности решения. Правильная последняя фраза при отказе гипотез: «Эта теорема вопрос не решает; исследуем отдельно».

БИЛЕТ 5

Интегральное уравнение и метод Пикара

Источники: Лекции: с. 24-27 PDF. Сборник Якуба: с. 21-25 PDF. Старый сборник: с. 12-13 PDF.

Объём ответа: Полностью доказать эквивалентность; описать последовательные приближения и вычислить пример. Полное доказательство теоремы Пикара не обязательно.

Доработка по фотографиям: вопрос 5

IMG_1958–IMG_1959; главы 5.

Что требуется. Доказать обе стороны эквивалентности; построить последовательные приближения.

Из $y' = f(x, y)$ и $y(x_0) = y_0$ интегрированием получаем $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$. Обратно: если y непрерывна и удовлетворяет этому равенству, непрерывность $f(s, y(s))$ позволяет продифференцировать интеграл; затем подстановка $x = x_0$ восстанавливает начальное условие.

Пикар заменяет неизвестное под интегралом предыдущим приближением:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \qquad y^{[m+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{[m]}(s))\, ds.$$

Квадратные скобки обозначают номер приближения, не производную. Для $y' = y$, $y(0) = 1$ получаем 1, $1 + x$, $1 + x + x^2/2$, затем $1 + x + x^2/2 + x^3/6$. Предел — e^x.

На отрезке сжатия $Lh < 1$ для оператора T имеем $\|Tu - Tv\|_\infty \le Lh\|u - v\|_\infty$. Это объясняет сходимость, но ограничение $Lh < 1$ относится к данному доказательству: само решение может существовать намного дальше.

Понять смысл

Производная сообщает, как функция меняется сейчас; интеграл складывает эти изменения от начальной точки до текущей. Поэтому задача Коши должна быть равносильна утверждению «текущее значение равно начальному плюс накопленное изменение»:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Неизвестная функция стоит и слева, и под знаком интеграла. Это не готовая формула через известные величины, но удобная форма для построения решения: под интеграл можно подставлять последовательные приближения.

Здесь s есть переменная интегрирования, а x есть свободная переменная и верхний предел. Нельзя заменять верхний предел на y: это изменило бы уравнение. Также нельзя писать под интегралом $f(s, y(x))$ вместо $f(s, y(s))$: правая часть должна вычисляться вдоль всей искомой кривой.

Точная формулировка эквивалентности

Пусть f непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in I$, а график функции $y : I \to \mathbb{R}$ лежит в D. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. y дифференцируема на I и удовлетворяет задаче Коши
$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0;$$
2. y непрерывна на I и для каждого $x \in I$ выполнено
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

На бесконечном или открытом интервале каждый конкретный интеграл берётся по конечному отрезку между x_0 и x, лежащему в I. Если $x < x_0$, используется обычное правило изменения ориентации интеграла. Условие Липшица для этой эквивалентности не требуется.

Доказательство

Из задачи Коши в интегральное уравнение. Пусть y решает задачу Коши. Дифференцируемая функция непрерывна. Композиция $s \mapsto f(s, y(s))$ непрерывна, поскольку непрерывны f и отображение $s \mapsto (s, y(s))$. По уравнению y' совпадает с этой непрерывной функцией. Таким образом, применима формула Ньютона-Лейбница:
$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\, ds = y(x) - y(x_0).$$
Интегрируя равенство $y'(s) = f(s, y(s))$ и используя $y(x_0) = y_0$, получаем
$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$
Это нужное интегральное уравнение. Начальное условие здесь не исчезло, а превратилось в постоянное слагаемое y_0.

Из интегрального уравнения в задачу Коши. Теперь предполагаем только непрерывность y и выполнение интегрального равенства. Композиция $g(s) = f(s, y(s))$ непрерывна. Поэтому функция
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$
дифференцируема и $G'(x) = g(x)$ по основной теореме анализа. Из равенства $y = y_0 + G$ получаем уже не предполагаемую, а доказанную дифференцируемость y и
$$y'(x) = G'(x) = f(x, y(x)).$$
Наконец, подставим $x = x_0$:
$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\, ds = y_0.$$
Проверены и уравнение, и начальное условие. Обе импликации доказаны.

Ключевой шаг обратного направления часто пропускают: производную нельзя просто взять у произвольной непрерывной функции. Здесь право на дифференцирование даёт её равенство интегралу от непрерывной функции.

Метод последовательных приближений

Введём обозначение $y^{[n]}$ для номера приближения, чтобы не путать нулевое приближение с числом y_0. Схема Пикара имеет вид

$$y^{[0]}(x) = y_0, \qquad y^{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{[n]}(s))\, ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

На каждом шаге под интегралом стоит уже известная функция. Все приближения удовлетворяют начальному условию, поскольку интеграл от x_0 до x_0 равен нулю. Однако отдельное приближение обычно ещё не удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению: его производная равна $f(x, y^{[n-1]}(x))$, а не $f(x, y^{[n]}(x))$.

При условиях Коши-Липшица в прямоугольнике R эти приближения определены на гарантированном отрезке $|x - x_0| \le h$ и равномерно сходятся к единственному решению. Ограничение $Mh \le b$ удерживает каждый следующий график внутри прямоугольника. Равномерная сходимость важна: она позволяет контролировать ошибку сразу на всём отрезке, а не только в одной точке.

Почему сходимость правдоподобна: полезная оценка

Следующая оценка объясняет механизм метода; она не заменяет обязательное доказательство эквивалентности, приведённое выше. Из схемы и липшицевости получается

$$|y^{[1]}(x) - y^{[0]}(x)| \le M|x - x_0|,$$

а затем по индукции

$$|y^{[n+1]}(x) - y^{[n]}(x)| \le \frac{ML^n|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Действительно, очередная разность оценивается интегралом от L предыдущей разности; интегрирование степени добавляет следующий делитель. Сумма этих оценок на $|x - x_0| \le h$ сходится благодаря факториалу. Поэтому последовательность равномерно сходится, а липшицева оценка позволяет перейти к пределу под интегралом. Полученный предел решает интегральное уравнение, значит, и задачу Коши.

Этот аргумент показывает, почему не нужно требовать $Lh < 1$ для приведённой факториальной оценки: многократное интегрирование даёт более сильное затухание, чем одна геометрическая оценка. Если объяснение сходимости не запрошено, на экзамене достаточно сформулировать результат и уверенно выполнить несколько итераций.

Пример из билета: экспонента

Рассмотрим $y' = y$, $y(0) = 1$. Интегральное уравнение и приближения имеют вид

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s)\, ds, \qquad y^{[n+1]}(x) = 1 + \int_0^x y^{[n]}(s)\, ds.$$

Вычисляем последовательно:

$$y^{[0]}(x) = 1,$$
$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x 1\,ds = 1 + x,$$
$$y^{[2]}(x) = 1 + \int_0^x (1+s)\,ds = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
$$y^{[3]}(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

По индукции

$$y^{[n]}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$$

Если формула верна для n, интегрирование каждого слагаемого даёт $\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}$, поэтому она верна и для $n+1$. Предел есть e^x. На любом фиксированном отрезке $|x| \le r$ остаток ряда оценивается, например, так:

$$|e^x - y^{[n]}(x)| \le e^r \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Итоговая проверка: $(e^x)' = e^x$ и $e^0 = 1$. Приближение $1 + x$ точно совпадает с решением в начале и имеет правильный начальный наклон, но не является точным решением на целом интервале.

Что метод не обещает без гипотез

Для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ нулевое начальное приближение даёт $y^{[n]} \equiv 0$ на каждом шаге. Оно сходится к одному решению, хотя задача имеет и другие решения. Поэтому факт успешной работы конкретной последовательности не доказывает единственность. Эквивалентность задач остаётся верной, а теорема о единственном пределе для задачи требует своих условий.

Пример с явной зависимостью от независимой переменной

Для задачи $y' = x + y$, $y(0) = 1$ получаем

$$y^{[n+1]}(x) = 1 + \int_0^x (s + y^{[n]}(s))\,ds.$$

Нулевое приближение здесь равно 1, а не 0. Первые шаги:

$$y^{[1]} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad y^{[2]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6},$$

$$y^{[3]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$$

Каждый раз явное слагаемое s добавляется заново. Нельзя интегрировать лишь предыдущее приближение и забывать исходную зависимость от x.

Точное решение можно независимо найти линейным методом: $y' - y = x$ даёт $y = Ce^x - x - 1$, а условие $y(0) = 1$ даёт $C = 2$. Поэтому $y = 2e^x - x - 1$. Его разложение начинается как $1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots$. Сравнение показывает, что коэффициенты приближений постепенно

уточняются. При этом третье приближение не совпадает со всем многочленом Тейлора четвёртой степени: коэффициент при x^4 ещё равен $\frac{1}{24}$ вместо $\frac{1}{12}$. Метод Пикара не следует без проверки отождествлять с простым выписыванием ряда Тейлора. Совпадение в примере экспоненты было особым удобным случаем.

Ответ у доски

Выписать задачу Коши и равносильное интегральное уравнение. В прямом направлении интегрировать и использовать начальное условие. В обратном обосновать непрерывность подынтегральной функции, затем дифференцируемость интеграла и проверку начального условия. После этого записать рекурсию Пикара, её условия сходимости и три первых шага для $y' = y$. Не смешивать доказательство эквивалентности с отдельной теорией сходимости.

Проверка себя

1. Запишите интегральное уравнение для $y' = x + y^2$, $y(2) = 3$.
2. Найдите $y^{[1]}$ и $y^{[2]}$ для $y' = x + y$, $y(0) = 1$, начиная с постоянной 1.
3. Почему из непрерывности y в обратном направлении можно получить существование y'?

Ответы. 1. $y(x) = 3 + \int_2^x (s + y(s)^2)\,ds$. 2. $y^{[1]} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $y^{[2]} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$. 3. Интегральное равенство представляет y как константу плюс интеграл с переменным пределом от непрерывной функции.

Частые ошибки

Ставят неверный верхний предел; забывают y_0; подставляют в рекурсию неизвестное точное решение; не проверяют начальное условие в обратной импликации; считают конечную итерацию точным ответом; требуют Липшица для самой эквивалентности. Проверяйте каждый индекс и различайте число y_0 и функцию $y^{[0]}$.

БИЛЕТ 6

Теорема Пеано и роль непрерывности

Источники: Лекции: с. 21-24 PDF. Сборник Якуба: с. 26-28 PDF. Старый сборник: с. 14 PDF.

Объём ответа: Сформулировать теорему без доказательства; обосновать примеры, показывающие достаточность, существенность и необязательность непрерывности.

Доработка по фотографиям: вопрос 6

IMG_1960; главы 6.

Что требуется. Формулировка без доказательства; непрерывность достаточна, но не необходима; при разрыве существование может нарушиться.

Теорема Пеано даёт локальное существование при непрерывной правой части, не обещая единственности. Три утверждения нельзя смешивать: непрерывность гарантирует существование; без неё общей гарантии нет; отдельное уравнение с разрывной правой частью всё же может иметь решение.

Для $y' = \operatorname{sgn} x$, $y(0) = 0$ непрерывный кандидат равен $|x|$, но его односторонние производные в нуле различны. Дифференцируемого решения на двустороннем интервале нет. Для начального значения 1 из тетради кандидат равен $1 + |x|$; вывод тот же.

Пример из тетради $y = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$, $y(0) = 0$, имеет $y'(0) = 0$ по определению, а вне нуля $y' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Производная разрывна. Если в определении решения требуется C^1, используем бесспорный пример $f(x, 0) = 0$, $f(x, y) = 1$ при $y \neq 0$: правая часть разрывна на оси, а $y = 0$ является гладким решением.

Понять смысл

Существование и единственность нельзя объединять в одно неразделимое свойство. Для существования локального решения достаточно непрерывности правой части. Для гарантированной единственности нужны дополнительные ограничения, например условие Липшица. Теорема Пеано отвечает именно на вопрос «существует ли хотя бы одно решение?».

Фраза «непрерывность существенна, но не необходима» не противоречива. Существенна означает, что нельзя просто вычеркнуть её из общей теоремы и сохранить гарантию для всех правых частей. Не необходима означает, что отдельные уравнения с разрывной правой частью всё же могут иметь решения. Для понимания нужны два разных примера: один с отсутствием решения, другой с существованием.

Точная формулировка

Локальная теорема Пеано. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ открыта и $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует $h > 0$ и хотя бы одно решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

определённое при $|x - x_0| < h$ и имеющее график в D. При этих условиях решение принадлежит C^1, поскольку $y' = f(x, y(x))$ непрерывна.

Есть количественная прямоугольная версия. Если f непрерывна на

$$R = \{|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\},$$

то с $M = \max_R |f|$ можно гарантировать существование на $|x - x_0| \le \min(a, \frac{b}{M})$; при $M = 0$ выбирают $h = a$. В отличие от Коши-Липшица, здесь не требуется оценка разностей по y и не утверждается единственность.

Теорема локальна. Она не утверждает, что решение определено для всех x, что его можно выразить элементарными функциями или что произвольные последовательные приближения Пикара обязательно дадут нужный результат. Для существования по Пеано используются иные общие аргументы, например компактность приближённых решений; их полное доказательство в данном билете не требуется.

Непрерывность даёт существование, но не единственность

У функции $f(y) = |y|^{\frac{2}{3}}$ нет разрыва в нуле. Поэтому Пеано гарантирует решение задачи $y(0) = 0$. Но нулевое решение и функция $y = \frac{x^3}{27}$ удовлетворяют одному уравнению:

$$\left(\frac{x^3}{27}\right)' = \frac{x^2}{9} = \left|\frac{x^3}{27}\right|^{\frac{2}{3}}.$$

Они различны и проходят через $(0, 0)$. Более того, возможны решения с ожиданием из билета 4. Пример показывает ровно то, что требуется: непрерывность совместима с неединственностью. Он не опровергает Пеано, поскольку единственность в заключение теоремы не входила.

Разрывная правая часть: решения может не быть

Определим правую часть во всех точках, включая нуль:

$$f(x, y) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим $y' = \operatorname{sgn} x$, $y(0) = 0$. Предположим, что решение дифференцируемо на двустороннем интервале вокруг нуля. При $x > 0$ его производная равна 1, поэтому $y = x + C_+$. Непрерывность в нуле и начальное условие дают $C_+ = 0$. При $x < 0$ аналогично $y = -x + C_-$ и $C_- = 0$. Единственный возможный непрерывный кандидат имеет вид $y = |x|$.

Но его разностные отношения в нуле равны

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=-1.$$

Производной нет. Получено противоречие; классического дифференцируемого решения на интервале вокруг нуля не существует. Значение $f(0,y)=0$ делает постановку определённой, но не устраняет излом. Даже если выбрать другое значение в нуле, различные односторонние наклоны останутся.

Равенство $|x|=\int_0^x \operatorname{sgn} s\,ds$ здесь верно, однако из него нельзя получить дифференцируемость в нуле по той теореме, которую мы использовали в билете 5: подынтегральная функция в нуле разрывна. В теории обобщённых решений такой объект полезен, но это другой класс решений, который надо явно назвать.

Разрывная правая часть: решение всё же может быть

Сначала рассмотрим пример, остающийся корректным даже при требовании C^1-гладкости решения:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & y=0,\\ 1, & y\neq 0.\end{cases}$$

Функция разрывна в каждой точке оси $y=0$. Тем не менее $y(x)\equiv 0$ решает задачу $y'=f(x,y)$, $y(0)=0$: обе части уравнения равны нулю при всех x. Уравнение использует правую часть только вдоль графика решения; плохое поведение в соседних точках не исключает существования этого графика.

Теперь разберём пример из сборника, где решение дифференцируемо, но его производная не непрерывна:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Для $x\neq 0$ правило произведения даёт

$$\varphi'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}).$$

В нуле производную нужно вычислять по определению:

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{h})}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin(\frac{1}{h})=0.$$

Следовательно, если положить

$$f(x,y)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

то φ решает задачу $y'=f(x,y)$, $y(0)=0$ в смысле существования производной и поточечного выполнения уравнения.

При этом f не непрерывна в нуле. Вдоль $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ её значения равны -1, а вдоль $\tilde{x}_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ равны 1. Обе последовательности стремятся к нулю, но значения имеют разные пределы. Поэтому $\varphi\notin C^1$ около нуля. Если преподаватель определяет классическое решение только

как функцию класса C^1, для утверждения о необязательности непрерывности лучше использовать первый пример с нулевым решением, а для этого примера явно сказать «дифференцируемое решение». Суть утверждения от соглашения о терминологии не меняется.

Как рассуждать в задаче

Если f непрерывна около начальной точки, сразу можно заключить локальное существование. Затем вопрос единственности рассматривается отдельно. Если f разрывна, нельзя заключать ни наличие, ни отсутствие решения без дополнительного исследования: пробуют найти конкретную функцию, анализируют производную на разных частях области и проверяют стыки.

Особенно полезно сравнивать три уровня результата. Непрерывность даёт хотя бы одно решение. Непрерывность вместе с локальным условием Липшица даёт единственное локальное решение. Явная формула или теорема продолжения могут дополнительно дать весь максимальный интервал. Ни один следующий уровень не следует автоматически из предыдущего.

Что именно доказывает контрпример

Если одна предложенная функция не подошла, это ещё не доказательство отсутствия решений: могла не подойти только догадка. В примере со знаком мы сначала вывели все возможные формы на двух полуинтервалах, затем использовали обязательную непрерывность и получили единственного возможного кандидата. Лишь после этого отсутствие его производной исключило любой ответ.

Тот же аргумент работает для правой части, равной постоянной a слева от нуля и другой постоянной b справа. Любое непрерывное решение с начальным значением y_0 обязано совпадать с $y_0 + ax$ слева и $y_0 + bx$ справа. Если $a \neq b$, производные не согласуются. Если $a = b$, остаётся проверить значение правой части непосредственно в нуле: оно тоже должно равняться этой общей производной. Таким образом, даже изменение функции в одной точке может влиять на существование поточечного классического решения, хотя определённый интеграл такого изменения не замечает.

Ответ у доски

Сформулировать Пеано, назвав открытую область, непрерывность, произвольную начальную точку и локальное существование. Явно сказать, чего теорема не утверждает. Показать непрерывный пример с неединственностью. Затем доказать невозможность решения для $\operatorname{sgn} x$ и предъявить разрывную правую часть с существующим решением. При использовании осциллирующего примера отдельно вычислить производную в нуле, а не подставлять нуль в формулу для $x \neq 0$.

Проверка себя

1. Что гарантирует Пеано для $y' = \sqrt{|y|} + x^2$, $y(0) = 0$? Можно ли по этой теореме сказать, сколько решений?
2. Является ли $y = |x|$ решением $y' = \operatorname{sgn} x$ на $(0, 1)$? На $(-1, 1)$?
3. Для $f(x, y) = 0$ при $y = 0$ и $f(x, y) = 1$ при $y \neq 0$ проверьте решение $y \equiv 0$. Почему это не противоречит теореме Пеано?

Ответы. 1. Хотя бы одно локальное решение; единственность не следует. 2. На $(0, 1)$ да; на $(-1, 1)$ нет, поскольку производная в нуле не существует. 3. Обе части равны нулю. Пеано даёт достаточное, а не необходимое условие существования.

Частые ошибки

Пеано не даёт единственности. Непрерывность достаточна, но не необходима для существования. В контрпримере правая часть определена в начальной точке. Различай дифференцируемость и C^1.

БИЛЕТ 7

Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Источники: Лекции: с. 31-32 PDF. Сборник Якуба: с. 29-32 PDF.

Объём ответа: Применить теорему Коши-Липшица к двум классам; аккуратно указать области и различить локальный и глобальный выводы. Методы решения приведены как необходимая практика.

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Теорема существования становится полезным инструментом, когда мы умеем проверить её условия для конкретной правой части. Линейное уравнение служит самым удобным примером: зависимость от y настолько проста, что единственность видна сразу, а явная формула даёт решение на всём интервале непрерывности коэффициентов.

Уравнение Бернулли внешне похоже на линейное, но степень y^γ меняет и область определения, и поведение в нуле, и возможность ухода в бесконечность за конечное время. Здесь нельзя переносить выводы линейного случая только по сходству записи. Главная проверка перед дифференцированием: где действительная степень вообще определена?

Линейное уравнение: точная формулировка

Рассмотрим

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad a, b \in C(I),$$

где I есть открытый интервал. Правая часть нормальной формы равна $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ и непрерывна в полосе $I \times \mathbb{R}$. На любом замкнутом подотрезке $J \subset I$ имеем

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |a(x)|\,|y_1 - y_2| \le L_J |y_1 - y_2|, \qquad L_J = \max_J |a|.$$

Следовательно, через каждую точку полосы проходит единственное локальное решение. Коэффициент a не обязан быть ограничен на всём I; для локального применения достаточно оценки на J.

Более сильное утверждение тоже верно: для любого $x_0 \in I$ и любого $y_0 \in \mathbb{R}$ единственное решение задачи Коши существует на всём I. Но это уже не непосредственное следствие одной локальной проверки. Обоснуем его формулой.

Вывод формулы и глобальное существование

Положим

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds, \qquad \mu(x) = e^{A(x)} > 0.$$

Тогда $\mu' = a\mu$, и после умножения уравнения на μ получаем полную производную:

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu(y' + ay) = \mu b.$$

Интегрируем от x_0 до x и учитываем $A(x_0) = 0$:

$$e^{A(x)}y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right].$$

Каждый интеграл здесь конечен для каждого $x \in I$, поскольку интегрирование идёт по компактному отрезку внутри интервала непрерывности. Значит, формула определяет решение на всём I. Дифференцирование проверяет уравнение, подстановка x_0 проверяет начальные данные.

Для единственности можно также обойтись без повторного обращения к теореме. Разность z двух решений с одинаковыми начальными данными удовлетворяет $z' + az = 0$, $z(x_0) = 0$. Поэтому $(e^A z)' = 0$, откуда $e^A z \equiv 0$ и $z \equiv 0$. Решение может расти при приближении к границе I или при $x \to \infty$, но не имеет бесконечного разрыва во внутренней точке I.

Уравнение Бернулли: область и локальная теорема

Уравнением Бернулли называется

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\gamma}, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \qquad a, b \in C(I).$$

Для произвольного действительного γ безопасная открытая область есть $D_+ = I \times (0, +\infty)$. На ней степень однозначно определяется как $y^{\gamma} = e^{\gamma \ln y}$ и

$$f(x, y) = -a(x)y + b(x)y^{\gamma}, \qquad f_y = -a(x) + \gamma b(x) y^{\gamma - 1}.$$

Обе функции непрерывны на D_+. Следовательно, в каждой точке $y_0 > 0$ имеются локальное существование и единственность. Оценка производной нужна на малом прямоугольнике, отделённом от $y = 0$, а не сразу на всей неограниченной полосе.

Отрицательные y допускаются лишь для тех степеней, для которых заранее выбрана действительная область: например, для целых показателей или подходящих рациональных показателей с нечётным знаменателем. Нельзя объявлять всю $I \times \mathbb{R}$ областью уравнения при произвольном действительном γ.

Что происходит при нуле.

- Если $\gamma > 1$ и действительная степенная функция определена в двусторонней окрестности нуля, то её производная непрерывно продолжается в нуль значением 0. Правая часть локально липшицева, и $y \equiv 0$ является единственным решением через нулевое начальное значение. Для произвольного $\gamma > 1$ на полуоси $y \geq 0$ тот же вывод для неотрицательных решений можно получить, продолжив степень как $(\max\{y, 0\})^\gamma$ на всю прямую и применив стандартную теорему. Это явно названное вспомогательное продолжение, а не определение исходной степени при отрицательных y.
- Если $0 < \gamma < 1$, значение $0^\gamma = 0$ определено, но липшицевость около нуля обычно нарушается при ненулевом b. Возможна неединственность, которую нужно доказывать отдельно. Она не следует из одного диапазона γ: при $b \equiv 0$ уравнение становится линейным и единственность сохраняется.
- Если $\gamma < 0$, степень при $y = 0$ не определена. Нулевую прямую надо исключить из исходной области. Нельзя объявить $y \equiv 0$ решением подстановкой в неопределённое выражение.

При $\gamma > 1$ производная обычно не ограничена при $|y| \to \infty$; корректно говорить о локальной, а не обязательно глобальной липшицевости.

Как решать уравнение Бернулли

На участке, где выбранная ветвь степени гладка и $y \neq 0$, делим уравнение на y^γ и вводим

$$z = y^{1-\gamma}, \qquad z' = (1-\gamma)y^{-\gamma}y'.$$

Получаем линейное уравнение

$$z' + (1-\gamma)a(x)z = (1-\gamma)b(x).$$

Сначала решаем его, затем выполняем обратную замену. При работе в $y > 0$ необходимо сохранить $z > 0$, поскольку $y^{1-\gamma}$ положительно. Формальная линейная функция z, перешедшая через нуль или ставшая отрицательной, не всегда даёт допустимое продолжение исходного решения.

Алгоритм поэтому таков: указать область степени; отдельно проверить нулевое решение, если оно допустимо; выполнить замену для ненулевых решений; применить начальное условие; выбрать связный интервал, где обратная замена корректна; проверить исходное уравнение. Интервал линейного уравнения для z может оказаться больше интервала исходного y.

Пример: локальная единственность и конечный взрыв

Решим

$$y' + y = y^2, \qquad y(0) = 2.$$

Здесь $f = y^2 - y$ гладка на всей плоскости, поэтому локальная единственность гарантирована. Для $y \neq 0$ положим $z = \frac{1}{y}$. Умножая исходное уравнение на $-y^{-2}$, получаем

$$z' - z = -1.$$

Общее решение есть $z = 1 + Ce^x$. Из $z(0) = \frac{1}{2}$ следует $C = -\frac{1}{2}$, поэтому

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{e^x}{2}}, \qquad -\infty < x < \ln 2.$$

Начальная точка лежит именно в этом связном интервале. При $x \to \ln 2-$ значение y стремится к $+\infty$, хотя правая часть исходного уравнения определена везде. Таким образом, гладкость и локальная единственность не гарантируют глобального существования.

Проверка даёт

$$y' = \frac{\frac{e^x}{2}}{(1 - \frac{e^x}{2})^2}, \qquad y^2 - y = \frac{\frac{e^x}{2}}{(1 - \frac{e^x}{2})^2}.$$

Ненулевое семейство $y = \frac{1}{1+Ce^x}$ включает стационарное решение $y \equiv 1$ при $C = 0$. Решение $y \equiv 0$ не получилось после деления, поэтому его дописывают отдельно. Для заданного значения 2 оно, разумеется, не подходит.

Почему одного значения коэффициента недостаточно

При $0 < \gamma < 1$ равенство $b(x_0) = 0$ само по себе не возвращает единственность: теорема проверяется в целой окрестности, а не в одной точке. Рассмотрим уравнение

$$y' = x\sqrt{y}, \qquad y \geq 0, \qquad y(0) = 0.$$

В начальной точке коэффициент перед корнем равен нулю. Тем не менее кроме нулевого решения существует

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^4}{16}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Для $x > 0$ производная равна $\frac{x^3}{4}$, а $x\sqrt{y} = x \cdot \frac{x^2}{4}$ даёт то же выражение. При $x < 0$ обе части нулевые; в нуле обе односторонние производные равны нулю. Получены два разных дифференцируемых решения.

С другой стороны, если b тождественно равно нулю в окрестности, уравнение там линейное и единственность есть. Таким образом, проверять надо поведение коэффициента поблизости и реальные решения, а не только показатель степени или значение коэффициента в начальной точке. Этот пример также напоминает, что полуплоскость $y \geq 0$ требует аккуратного обращения с граничными начальными значениями.

Ответ у доски

Выписать линейное уравнение и оценку Липшица через max $|a|$ на компактном подотрезке. Разделить локальный вывод теоремы и глобальный вывод явной формулы. Затем записать Бернулли, сначала оговорив область действительной степени. Вычислить f_y, объяснить поведение вдали от нуля и три случая у нуля. Завершить заменой $z = y^{1-\gamma}$ и напоминанием о потерянных нулевых решениях.

Проверка себя

1. Решите $y' + 2y = 4$, $y(0) = 1$ и укажите интервал существования.

2. Какое линейное уравнение получается из $y' + xy = y^3$ после замены $z = y^{-2}$?
3. Верно ли, что при $0 < \gamma < 1$ любое уравнение Бернулли имеет несколько решений через $y = 0$? Приведите контрпример.
4. Для $y' + y = y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$ найдите решение и проверьте наличие конечного взрыва.

Ответы. 1. $y = 2 - e^{-2x}$ на всей $\mathbb{R}$. 2. $z' - 2xz = -2$ на участке $y \neq 0$. 3. Нет: при $b \equiv 0$ получаем линейное уравнение; например, $y' + y = 0$ имеет единственное нулевое решение через нуль. 4. $y = \frac{1}{1+e^x}$ на всей $\mathbb{R}$; конечного взрыва нет.

Частые ошибки

Применяют дробную степень ко всем отрицательным значениям; считают локальную оценку глобальной; делают глобальный вывод из локальной теоремы; забывают знак $1 - \gamma$ в замене; теряют нулевое решение; считают отказ условия Липшица доказательством неединственности. При проверке области задайте себе три вопроса: определена ли степень, обратима ли замена, не обращается ли знаменатель в нуль?

БИЛЕТ 8

Продолжение решений и предельное поведение

Источники: Лекции: с. 28-31 PDF. Сборник Якуба: с. 33-35 PDF. Сопоставление: старый сборник, с. 15-16 PDF.

Объём ответа: Определения продолжения и максимального решения; формулировка теоремы о предельном поведении и разбор ограниченной и неограниченной областей. Полное доказательство теоремы не требуется.

Доработка по фотографиям: вопрос 7

IMG_1961–IMG_1962; главы 8.

Что требуется. Определения; ограниченная и неограниченная области; корректная теорема о предельном поведении.

В тетради формулировка «либо продолжается вправо, либо имеет вертикальную асимптоту» записана слишком широко. Для произвольной области верно: график максимального решения покидает каждый компакт, лежащий внутри области определения. Остановка может быть вызвана границей области при конечном значении функции.

Контрпример к чрезмерной формулировке: $y' = 0$ в $D = \{(x, y) : x < 1\}$, $y(0) = 0$. Максимальное решение $y = 0$ имеет правый конец 1, но вертикальной асимптоты нет. Для полосы $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, если максимальный правый конец $\beta < b$ конечен, действительно $|y(x)| \to \infty$ при $x \to \beta-$.

На всей плоскости $y' = y^2$, $y(0) = 1$ даёт $y = 1/(1 - x)$ на $(-\infty, 1)$; это настоящий конечный взрыв. Для $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ получаем $1/(1 + x)$ на $(-1, \infty)$: вправо решение продолжается неограниченно. Интервал всегда связный и содержит начальную точку.

Понять смысл

Локальная теорема обещает небольшой участок решения рядом с начальной точкой. Следующий вопрос: можно ли двигаться дальше, повторяя локальное построение? Если уравнение остаётся регулярным и значения решения не покидают допустимую область, оснований для остановки обычно нет.

Важно отличать границу выбранного для удобства интервала от настоящего препятствия. Функция e^x на $(-1, 1)$ решает $y' = y$, но искусственные концы -1 и 1 ничем не выделены: формулу можно продолжить. А решение $\frac{1}{1-x}$ уравнения $y' = y^2$ не удаётся продолжить через $x = 1$ как конечную непрерывную функцию. Теорема продолжения описывает возможные реальные причины остановки.

Точная формулировка определений

Пусть $y : I \to \mathbb{R}$ является решением в открытой области D, то есть $(x, y(x)) \in D$. Решение $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ называется продолжением y, если $I \subsetneq \tilde{I}$ и $\tilde{y}(x) = y(x)$ для всех $x \in I$. Продолжение вправо увеличивает правый конец интервала, продолжение влево уменьшает левый.

Решение называется максимальным, или непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни в одну сторону в той же области D для того же уравнения. Его интервал называют максимальным интервалом существования и обозначают (α, β), где возможны бесконечные концы.

Слово «максимальный» не означает «самый длинный среди всех решений». Разные начальные данные могут давать разные интервалы. При непрерывности и локальной липшицевости правой части каждое локальное решение имеет единственное максимальное продолжение. Без единственности возможны разные продолжения, так что этот вывод нельзя переносить без гипотез.

Область D является частью постановки. Для уравнения $y' = 0$ в области $D = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ решение $y \equiv 0$ максимально на $(-1, 1)$ относительно этой области. Если отдельно разрешить исходное уравнение на всей плоскости, та же функция продолжается на всю $\mathbb{R}$. Здесь изменена сама область задачи.

Теорема о выходе из компактов

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ открыта, f непрерывна в D и локально липшицева по y. Пусть y есть максимальное решение $y' = f(x, y)$ на (α, β). Тогда при приближении x к правому концу β график покидает каждый компакт $K \subset D$: для любого такого K найдётся $x_K < \beta$ такое, что

$$(x, y(x)) \notin K \quad \text{при } x_K < x < \beta.$$

Аналогичное утверждение верно при $x \to \alpha+$. Здесь компакт внутри D есть замкнутое ограниченное множество, которое целиком лежит в допустимой области, без её исключённой границы.

Это наиболее надёжная общая формулировка. Она не требует существования одного конечного предела $y(x)$ и не утверждает, что график обязательно подходит к заранее названной точке. Для непрерывной правой части соответствующий результат о максимальных продолжениях также формулируется без единственности, но наша версия согласована с используемой теорией однозначного продолжения.

Почему внутреннее конечное препятствие невозможно

Полное доказательство общей теоремы в билет не входит, но полезно понимать основной механизм. Допустим, $\beta < \infty$ и при $x \to \beta-$ существует конечный предел y_*. Если $(\beta, y_*) \in D$, то около этой точки действует локальная теорема существования. Из неё можно построить решение справа от β и присоединить к прежнему.

Непрерывность f даёт $y'(x) = f(x, y(x)) \to f(\beta, y_*)$. Поэтому склеенная функция имеет правильную производную в точке стыка; единственность согласует локальные части.

Возникло продолжение, противоречащее максимальности. Значит, конечный предел во внутренней допустимой точке не может быть причиной остановки.

Если заранее известно только, что график остаётся в одном компакте внутри D, то f на нём ограничена. Оценка

$$|y(x_2) - y(x_1)| \le M|x_2 - x_1|$$

обеспечивает существование конечного предела при конечном β. Далее применяется предыдущий аргумент. Это объяснение полезно для памяти, но общая теорема о выходе из каждого компакта сильнее одной проверки ограниченного графика.

Ограниченная и неограниченная области

Если D ограничена, уход графика из любого внутреннего компакта означает

$$\operatorname{dist}((x, y(x)), \partial D) \longrightarrow 0 \quad \text{при } x \to \beta - .$$

Чтобы понять это, зафиксируем $\varepsilon > 0$: точки области на расстоянии не меньше ε от границы образуют компакт. Решение должно со временем покинуть его. При этом не следует без дополнительных условий объявлять, что предельная точка на границе единственна.

Для полосы $D = (a, b) \times \mathbb{R}$ ситуация особенно ясна. Если правый конец максимального интервала β удовлетворяет $\beta < b$ и конечен, то

$$|y(x)| \longrightarrow +\infty \quad \text{при } x \to \beta - .$$

Иначе график возвращался бы в некоторый ограниченный прямоугольник, расположенный строго внутри полосы, что противоречит теореме. Для скалярного непрерывного решения это означает уход к $+\infty$ или $-\infty$; менять знак бесконечно часто при стремлении модуля к бесконечности невозможно из-за промежуточных нулей.

Если $\beta = b$, решение доходит до границы области по x; значение y может оставаться конечным или вести себя иначе. Если $\beta = +\infty$, конечного препятствия справа нет. Для произвольной неограниченной области удобнее сохранять формулировку через компакты: график может подходить к конечной границе, уходить в бесконечность или сочетать эти варианты.

Пример 1: конечное время взрыва

Решим $y' = y^2$, $y(0) = 1$. После разделения при $y \neq 0$ имеем

$$-\frac{1}{y} = x + C, \qquad C = -1, \qquad y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Формула допускает $x \neq 1$, но максимальный интервал задачи Коши обязан быть связным и содержать нуль. Поэтому

$$I = (-\infty, 1).$$

При $x \to 1-$ значение y стремится к $+\infty$. Правая часть y^2 гладка на всей плоскости, однако решение существует справа только до конечного момента. Это и называется взрывом за конечное время.

Та же формула на $(1, +\infty)$ задаёт другое решение уравнения, но не продолжение задачи с начальной точкой 0: объединение интервалов не является интервалом и не содержит точки, через которую надо было бы пройти непрерывно. «Перескочить» бесконечность нельзя.

Для общего условия $y(x_0) = y_0 \neq 0$ получается

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}.$$

При $y_0 > 0$ взрыв находится справа, при $y_0 < 0$ слева. При $y_0 = 0$ решение нулевое на всей прямой. Максимальный интервал зависит от начальных данных.

Пример 2: конечный предел на исключённой границе

Возьмём $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в области $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, с условием $y(1) = 1$. Получаем $y = \sqrt{x}$ на $(0, +\infty)$. При $x \to 0+$ значение стремится к нулю, но начальная правая часть в $x = 0$ не определена, а производная неограниченно растёт. Поэтому конечность значения не даёт продолжения через границу. Утверждение «ограниченное решение всегда продолжается» без слов «внутри области уравнения» неверно.

Полезное дополнение: линейный рост

Если f непрерывна и локально липшицева по y в полосе $(a, b) \times \mathbb{R}$, а

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x), \qquad A, B \geq 0, \quad A, B \in C(a, b),$$

то решение продолжается на весь интервал (a, b). На каждом компактном промежутке оценка Гронуолла ограничивает $|y|$, поэтому конечный взрыв внутри полосы исключён. В частности, линейное уравнение удовлетворяет оценке с $A = |a|$, $B = |b|$. Это дополнительный критерий; сверхлинейный рост лишь допускает взрыв, но сам по себе не доказывает его для всех начальных данных.

Ответ у доски

Определить продолжение, максимальное решение и максимальный интервал. Назвать область, в которой рассматривается продолжение. Сформулировать выход из каждого компакта, затем объяснить ограниченную область и полосу. Привести $y' = y^2$, вычислить максимальный интервал и показать конечный взрыв. Если требуется пояснение, рассказать, почему конечный предел во внутренней точке позволяет склейку.

Проверка себя

1. Найдите максимальный интервал для $y' = y^2$, $y(0) = -2$.
2. Является ли $y = e^x$ на $(0, 1)$ максимальным решением $y' = y$ в $D = \mathbb{R}^2$?
3. Решите $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$. Можно ли продолжить решение через нуль для исходного уравнения?

Ответы. 1. $y = -\frac{2}{1+2x}$, $I = (-\frac{1}{2}, +\infty)$. 2. Нет, продолжается на всю прямую. 3. $y = \ln x$ на $(0, +\infty)$; через нуль исходное уравнение не определено, а решение уходит к $-\infty$.

Частые ошибки

Не путай область правой части с интервалом решения, локальную теорему с глобальностью, ограниченность с продолжимостью. Максимальное решение задаётся на интервале. Выход из компактов не гарантирует единственного предела. Назови область и конец продолжения.

БИЛЕТ 9

Уравнения с разделяющимися переменными

Источники: Лекции: с. 33-39 PDF; геометрический пример и исследование границ также с. 44-48 PDF. Сборник Якуба: с. 36-42 PDF. Старый сборник: с. 17-20 PDF.

Объём ответа: Полностью доказать существование и единственность при непрерывном ненулевом множителе, зависящем от y; разобрать случаи одной переменной и интегральные кривые.

Доработка по фотографиям: вопрос 8

IMG_1963–IMG_1964; главы 9.

Что требуется. Доказать существование и единственность при ненулевом множителе; разобрать частные случаи и кривые.

Закроем пометку «дописать» на IMG_1964. Пусть $y' = f(x)g(y)$, f, g непрерывны, $g \neq 0$ на интервале J. Выберем первообразные $F' = f$, $G' = 1/g$. Тогда G' непрерывна и не обращается в нуль, значит G строго монотонна, имеет локальную дифференцируемую обратную и

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + F(x) - F(x_0)).$$

Формула определена для x достаточно близких к x_0, поскольку аргумент остаётся внутри $G(J)$. Дифференцирование даёт $G'(y)y' = f(x)$, то есть исходное уравнение, а при x_0 получается y_0. Любое другое решение обязано удовлетворять тому же интегральному тождеству и потому совпадает с этой функцией.

Если $g(y_*) = 0$, решение $y = y_*$ проверяется отдельно. Теорема выше в этой точке неприменима; при одной лишь непрерывности g единственность там может как быть, так и нарушаться.

Понять смысл

Уравнение

$$y' = p(x)q(y)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Зависимость правой части разбита на два множителя: один зависит только от независимой переменной, другой только от искомой функции. При $q(y) \neq 0$ можно перенести зависимость от y в левую часть и получить производную составной функции.

В учебной записи часто пишут $\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx$. Это удобное сокращение, но его строгий смысл даёт правило цепочки. Теорема существования здесь особенно интересна: для единственности достаточно непрерывности и ненулевого значения q, без требования производной q' или условия Липшица.

Точная формулировка

Пусть $p \in C(a,b)$, $q \in C(c,d)$ и

$$q(y) \neq 0 \quad \text{для всех } y \in (c,d).$$

Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$ проходит единственное локальное решение задачи Коши

$$y' = p(x)q(y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Условие ненулевого множителя относится только к q. Функция p может обращаться в нуль и менять знак. Не нужно предполагать её постоянный знак или монотонность решения $y(x)$.

Если $q(y_0) \neq 0$, но у q есть нули в других местах, теорема всё равно применима локально: по непрерывности можно выбрать меньший интервал вокруг y_0, где нулей нет. Если $q(y_0) = 0$, вывод этой теоремы неприменим, и нулевой множитель исследуется отдельно.

Доказательство через обратную функцию

Шаг 1. Построим две известные функции. Определим

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{q(v)}, \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds.$$

Обе функции непрерывно дифференцируемы, причём

$$G'(y) = \frac{1}{q(y)} \neq 0, \qquad P'(x) = p(x), \qquad G(y_0) = P(x_0) = 0.$$

Непрерывная ненулевая функция q сохраняет знак на интервале (c,d). Поэтому G' сохраняет знак, G строго монотонна и имеет обратную функцию на интервале $G((c,d))$. Обратная функция дифференцируема, поскольку G' нигде не обращается в нуль.

Шаг 2. Докажем единственность возможного решения. Если y уже является решением, то по правилу цепочки

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = \frac{p(x)q(y(x))}{q(y(x))} = p(x).$$

Интегрирование от x_0 до x даёт

$$G(y(x)) = P(x).$$

Следовательно, всякое решение с данными начальными значениями обязано удовлетворять

$$y(x) = G^{-1}(P(x)).$$

Правая часть содержит только известные функции. Значит, двух различных решений в достаточно малой общей окрестности быть не может. Этот вывод не требует монотонности самой функции y: монотонна вспомогательная функция G.

Шаг 3. Обоснуем, что формула определена. Точка $0 = G(y_0)$ лежит внутри интервала $G((c,d))$. Функция P непрерывна и $P(x_0) = 0$. Поэтому существует окрестность x_0, на которой $P(x) \in G((c,d))$. Именно на ней формула $G^{-1}(P(x))$ имеет смысл и принимает значения в (c,d). Этот небольшой шаг необходим: обратная функция не обязана быть определена для всех действительных аргументов.

Шаг 4. Проверим существование. Для построенной функции по формуле производной обратной функции получаем

$$y'(x) = (G^{-1})'(P(x))P'(x) = \frac{p(x)}{G'(y(x))} = p(x)q(y(x)).$$

Также $y(x_0) = G^{-1}(0) = y_0$. Значит, решение действительно существует. Единственность уже доказана на втором шаге. Вся теорема получена конструктивно: формула не просто описывает неизвестное решение, а создаёт его.

Как решать задачи без потери решений

1. Определить области p и q, найти корни $q(y) = 0$.
2. Для каждого допустимого корня r отдельно проверить постоянное решение $y \equiv r$.
3. На каждом интервале, где $q \neq 0$, проинтегрировать
$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx + C.$$
4. При начальном условии выбрать нужную ветвь и найти C.
5. Указать связный интервал допустимости и проверить исходное уравнение.

Постоянные решения действительно теряются при делении на q, но не каждый нуль q означает неединственность. Например, для $y' = y$ нулевое решение единственно через $y = 0$; для $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$ возможны склеивания. Наличие равновесия и нарушение единственности являются разными утверждениями.

Правая часть зависит только от x

Для $y' = p(x)$, $p \in C(a, b)$ решение имеет вид

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds.$$

Оно определено на всём (a, b), а разные решения отличаются постоянной и получаются вертикальными переносами. Поле направлений имеет одинаковые наклоны вдоль каждой вертикальной прямой.

Если p имеет особенность на границе, поведение y определяется несобственным интегралом. Например, для $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ на $x > 0$ первообразная $2\sqrt{x}$ имеет конечный предел при $x \to 0+$, хотя производная неограниченна. Для $p(x) = \frac{1}{x}$ первообразная $\ln x$ уходит к $-\infty$. Сходящийся интеграл означает конечный предел, но не разрешает продолжить исходное уравнение через точку, где оно не определено.

Иногда вводят обратную зависимость $x = x(y)$ и уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p(x)}$. Это допустимо на монотонном участке при $p(x) \neq 0$. Если затем правую часть нового уравнения доопределяют в особой точке, исследуется уже новое уравнение. Его вертикальные решения и возможная неединственность не являются автоматически свойствами исходной задачи для $y(x)$.

Правая часть зависит только от y

Для автономного уравнения $y' = q(y)$ на интервале без нулей q имеем

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{q(v)}.$$

Здесь знак q определяет направление движения: решение строго возрастает при $q > 0$ и убывает при $q < 0$. Сдвиг x на постоянную сохраняет уравнение, поэтому непостоянные решения внутри одного промежутка между равновесиями являются горизонтальными сдвигами соответствующей максимальной кривой.

Пусть $q(r) = 0$, а между y_0 и r других нулей нет. Время достижения равновесия в допустимом направлении определяется интегралом $\int_{y_0}^{r} \frac{dv}{q(v)}$. Если он расходится по модулю, к равновесию можно лишь приближаться при бесконечном времени в соответствующую сторону. Если он сходится, непостоянная ветвь достигает r за конечное время. Поскольку $q(y) \to 0$, её можно состыковать с постоянным решением с нулевой производной. Такое склеивание показывает нарушение двусторонней локальной единственности в точке стыка. Нельзя делать универсальный вывод о направлении ухода, не учитывая знак q.

Например, у $q(y) = y$ интеграл $\int \frac{dy}{y}$ расходится при $y \to 0$, и ненулевые экспоненты не достигают нуля за конечное время. У $q(y) = y^{\frac{2}{3}}$ на $y > 0$ интеграл $\int_0^y v^{-\frac{2}{3}}\, dv = 3y^{\frac{1}{3}}$ конечен; возникают кубические ветви и ожидание на нуле.

Пример интегральных кривых

Рассмотрим $y' = -\frac{x}{y}$ с условием $y(0) = 2$. Область имеет две компоненты $y > 0$ и $y < 0$; выбираем верхнюю. Интегрирование даёт

$$y\,dy = -x\,dx, \qquad x^2 + y^2 = C, \qquad C = 4.$$

Из начального условия выбирается ветвь

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 < x < 2.$$

Её производная равна $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, поэтому проверка выполнена. При приближении к концам $y \to 0$, но исходная правая часть становится неопределённой. Максимальные графики всего семейства являются верхними или нижними открытыми полуокружностями, а не целыми окружностями. Полные окружности относятся к параметрическому фазовому описанию соответствующей системы.

Дополнительный пример из источников: разные границы

Для

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}\,(x-1)^3}$$

область по x разбивается точками -1 и 1 на три интервала. Решение на каждом из них задаётся определённым интегралом. Около -1 правая часть ведёт себя как $-\frac{1}{8\sqrt[3]{x+1}}$, поэтому несобственный интеграл сходится и значение y имеет конечный предел. Уравнение в -1 по-прежнему не определено.

Около 1 имеем эквивалентность $y' \sim 2^{-\frac{1}{3}}(x-1)^{-3}$, откуда

$$y(x) \sim -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}\,(x-1)^2} \quad \text{при } x \to 1 \pm .$$

В частности, $y \to -\infty$ с обеих сторон. При $x \to \pm\infty$ правая часть имеет порядок $|x|^{-\frac{10}{3}}$, поэтому соответствующие несобственные интегралы сходятся и у внешних ветвей есть конечные горизонтальные асимптоты. Для качественного ответа элементарная первообразная не нужна: достаточно сравнения степеней и контроля знаков.

Ответ у доски

Назвать форму $p(x)q(y)$ и гипотезу $q \neq 0$. Определить G и P, доказать строгую монотонность G, вывести обязательную формулу для любого решения, обосновать локальную допустимость обратной функции и проверить построенное решение. Затем разобрать два случая одной переменной, отдельно указав равновесия и возможные потерянные решения. Завершить примером полуокружности с точным интервалом.

Проверка себя

1. Решите $y' = 2xy$, $y(0) = 3$. Не потеряно ли решение при делении?
2. Применима ли доказанная теорема к $y' = 1 + \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$? Нужна ли производная правой части в нуле?
3. Найдите все постоянные решения $y' = x(y^2 - 1)$.
4. Для $y' = y^2$, $y(0) = 1$ выразите время ухода к $+\infty$ через несобственный интеграл.

Ответы. 1. $y = 3e^{x^2}$; отдельно есть $y \equiv 0$, но оно не подходит заданным данным. 2. Да: $q = 1 + \sqrt{|y|}$ непрерывна и положительна; производная в нуле не требуется. 3. $y \equiv 1$ и $y \equiv -1$. 4. $\int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} = 1$, поэтому правый конец равен 1.

Частые ошибки

Делят на q до проверки её нулей; требуют ненулевую p; необоснованно предполагают монотонность y при переменной p; забывают область обратной функции; принимают полный уровень первого интеграла за один график; переносят решения «перевёрнутого» уравнения в исходную задачу без проверки.

БИЛЕТ 10

Однородные уравнения первого порядка

Источники: Лекции: с. 39-44 PDF. Сборник Якуба: с. 43-46 PDF. Сопоставление: старый сборник, с. 21-22 PDF.

Объём ответа: Доказать существование и единственность в секторе без инвариантных лучей; доказать сохранение семейства при гомотетии; определить инвариантный луч.

Доработка по фотографиям: вопрос 9

IMG_1965–IMG_1967; главы 10.

Что требуется. Замена; доказательство единственности вне инвариантных лучей; подобие интегральных кривых; инвариантный луч.

Для $y' = F(y/x)$, $x \neq 0$, вводим $u = y/x$: $y' = u + xu'$, поэтому $xu' = F(u) - u$. При $F(u) - u \neq 0$ это разделяющееся уравнение; единственность следует из предыдущего вопроса даже без дифференцируемости F.

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Корни $F(k) = k$ нельзя потерять при делении: $y = kx$ является решением на каждом допустимом полулуче $x > 0$ или $x < 0$. Через $x = 0$ исходная дробная постановка не проходит.

При положительной гомотетии $(x, y) \mapsto (cx, cy)$ отношение y/x не меняется, а $\ln|cx| = \ln|x| + \ln c$ меняет только константу. Поэтому семейство кривых сохраняется на той части области, куда действует гомотетия. Не следует объявлять одну кривую неизменной: в общем случае она переходит в другую кривую семейства.

Понять смысл

Однородность в этом билете означает, что наклон поля зависит только от отношения $\frac{y}{x}$. Все точки одного луча из начала координат имеют одинаковое отношение координат, следовательно, одинаковый наклон. Если растянуть рисунок от начала координат, поле направлений согласуется с этим растяжением.

Не путайте этот термин с линейным однородным уравнением $y' + a(x)y = 0$. Здесь слово описывает масштабную симметрию правой части, а не отсутствие свободного слагаемого в линейном операторе. Уравнение $y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$ однородно в нынешнем смысле и при этом нелинейно по y.

Точная формулировка

Уравнение первого порядка рассматриваемого типа записывается как

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Правая часть $H(x,y)=F(\frac{y}{x})$ однородна нулевой степени:

$$H(kx,ky)=H(x,y)$$

при допустимом $k\neq 0$. В более общей постановке однородность на конусе часто задают лишь для $k>0$; мы всегда учитываем, остаётся ли преобразованная точка в области уравнения.

Пусть F непрерывна на интервале $J=(a,b)$. Тогда область естественно разбивается на два сектора

$$D_+=\{(x,y):x>0,\ \frac{y}{x}\in J\},\qquad D_-=\{(x,y):x<0,\ \frac{y}{x}\in J\}.$$

Прямая $x=0$ в эту нормальную запись не входит. При изучении одного решения знак x фиксирован на всём его интервале.

Теорема существования и единственности. Если $F\in C(J)$ и

$$F(v)-v\neq 0\quad\text{для всех } v\in J,$$

то через каждую точку D_+ или D_- проходит единственное локальное решение. Непрерывной производной F' не требуется. Условие $F(v)\neq v$ выделяет сектор, в котором нет инвариантных лучей.

Доказательство существования и единственности

Сделаем обратимую при $x\neq 0$ замену

$$v(x)=\frac{y(x)}{x},\qquad y(x)=xv(x).$$

По правилу произведения $y'=v+xv'$. Поэтому исходное уравнение равносильно

$$v+xv'=F(v),\qquad v'=\frac{1}{x}(F(v)-v).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. На любой окрестности $x_0\neq 0$ функция $\frac{1}{x}$ непрерывна. Множитель $q(v)=F(v)-v$ непрерывен и ненулевой на J. По теореме билета 9 существует единственное локальное решение для условия

$$v(x_0)=v_0=\frac{y_0}{x_0}.$$

Функция $y=xv$ тогда является решением исходного уравнения и удовлетворяет $y(x_0)=y_0$. Любое другое решение y породило бы другое решение $v=\frac{y}{x}$ той же задачи, что противоречит единственности. Обратимость замены переносит и существование, и единственность.

Можно явно записать неявную формулу. Положим

$$G(v)=\int_{v_*}^{v}\frac{d\eta}{F(\eta)-\eta},\qquad v_*\in J.$$

Функция G строго монотонна. Интегрирование даёт

$$G(v(x))-G(v_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{s}=\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|,$$

или

$$G\left(\frac{y}{x}\right)-\ln|x|=C.$$

Для извлечения решения выбирают такой интервал около x_0, чтобы аргумент обратной функции G^{-1} лежал в $G(J)$, как в билете 9. Нельзя молча считать, что этот интервал непременно совпадает со всей полуосью.

Гомотетия: точное утверждение и доказательство

Если $y = \varphi(x)$ решает исходное уравнение на I, а масштаб $k > 0$ сохраняет область, то

$$\psi(x) = k\varphi(\frac{x}{k}), \qquad x \in kI,$$

тоже является решением. Её график получается гомотетией $(x, y) \mapsto (kx, ky)$ с центром в начале координат. Дифференцирование даёт

$$\psi'(x) = \varphi'(\frac{x}{k}) = F\left(\frac{\varphi(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}}\right) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right).$$

Следовательно, семейство интегральных кривых сохраняется при гомотетии. Для $k < 0$ та же вычислительная проверка верна, если область допускает переход в противоположный сектор.

Неявная формула объясняет изменение постоянной. После растяжения старой кривой имеем

$$G\left(\frac{ky}{kx}\right) - \ln|kx| = G\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| - \ln k = C - \ln k.$$

Таким образом, C переходит в $C - \ln k$. В одном фиксированном секторе без инвариантных лучей максимальные члены этого семейства с разными C получаются друг из друга положительными гомотетиями.

Последняя оговорка существенна. Нельзя утверждать, что любые две интегральные кривые во всех секторах обязательно гомотетичны: гомотетия сохраняет отношение $\frac{y}{x}$, не меняет наклон прямого луча и не переносит один диапазон наклонов в другой. Универсальное свойство состоит в сохранении семейства, а взаимное подобие относится к соответствующей неинвариантной семье внутри сектора.

Инвариантные лучи

Луч $y = kx$, $x > 0$ или $x < 0$, называется инвариантным, если его график является решением. Подстановка даёт необходимое и достаточное условие:

$$y' = k, \qquad F(\frac{y}{x}) = F(k), \qquad F(k) = k.$$

Корни уравнения $F(k) - k = 0$ называются возможными наклонами инвариантных лучей. Начало координат не включается, поскольку исходное уравнение не определено при $x = 0$. Один допустимый наклон обычно задаёт два противоположных луча, если оба сектора входят в область.

При разделении на $F(v) - v$ инвариантные решения теряются, поэтому их обязательно ищут до деления. При дополнительной локальной липшицевости F они подчиняются обычной теореме единственности. При одной непрерывности через точку инвариантного луча иногда могут проходить и другие решения. Следовательно, доказанная выше теорема специально не охватывает корни $F(v) - v$.

Пример: нелинейное однородное уравнение

Рассмотрим

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Здесь $F(v) = v^2 + v$. Инвариантные наклоны определяются равенством $v^2 = 0$, поэтому $y \equiv 0$ даёт по одному лучу на каждой полуоси. Для ненулевых решений замена $y = xv$ приводит к

$$xv' = v^2, \qquad -\frac{1}{v} = \ln|x| + C, \qquad y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Начальное условие даёт $1 = -\frac{1}{C}$, значит, $C = -1$ и

$$y(x) = \frac{x}{1 - \ln x}, \qquad 0 < x < e.$$

Интервал должен содержать 1, сохранять $x > 0$ и не пересекать нуль знаменателя. Производная равна

$$y' = \frac{2 - \ln x}{(1 - \ln x)^2},$$

а правая часть после подстановки равна той же дроби. При $x \to e-$ решение стремится к $+\infty$. При $x \to 0+$ оно стремится к нулю, но продолжения через нуль для исходной нормальной записи нет.

Гомотетия с коэффициентом $k > 0$ переводит решение в

$$\psi(x) = \frac{x}{1 + \ln k - \ln x}, \qquad 0 < x < ke.$$

Она меняет масштаб и положение вертикальной асимптоты, сохраняя форму семейства. Нулевые лучи при положительной гомотетии переходят сами в себя.

Что может случиться на инвариантном луче

Условие отсутствия инвариантных лучей в теореме нельзя вычеркнуть, сохранив только непрерывность F. Возьмём

$$F(v) = v + \sqrt{|v|}, \qquad x > 0.$$

Наклон $v = 0$ задаёт инвариантный луч $y = 0$. Через точку $(1, 0)$ проходит как нулевое решение, так и функция

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{x(\ln x)^2}{4}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Проверим вторую ветвь. Для $x > 1$ положим $v = \frac{y}{x} = \frac{(\ln x)^2}{4}$. Тогда

$$y' = v + \frac{\ln x}{2} = v + \sqrt{|v|} = F(v).$$

При $x < 1$ всё равно нулю. В точке 1 сама функция и производная правой ветви стремятся к нулю, поэтому склейка дифференцируема и удовлетворяет уравнению. Единственность через точку инвариантного луча нарушена.

В секторах $v > 0$ и $v < 0$ множитель $F(v) - v = \sqrt{|v|}$ ненулевой, и доказанная теорема работает. Так один пример показывает точную границу её применимости. Наличие инвариантного луча не всегда означает неединственность, но при одной непрерывности оно оставляет этот вопрос открытым.

Как решать задачи и отвечать у доски

Проверить, что правая часть зависит от $\frac{y}{x}$, и указать $x \neq 0$. Найти корни $F(v) - v$, сохранить соответствующие лучи. Выбрать промежутки между корнями и границами области F. Выполнить замену $y = xv$ с полным правилом произведения, разделить переменные, интегрировать и вернуться к y. По начальному условию определить постоянную и связный интервал.

В устном доказательстве сначала нужна теорема из билета 9, затем обратимость замены. Для подобия быстрее всего проверить $\psi(x) = k\varphi(\frac{x}{k})$ непосредственным дифференцированием. После этого можно показать изменение C в неявной формуле. Завершить определением инвариантного луча и условием $F(k) = k$.

Проверка себя

1. Решите $y' = \frac{y}{x} + 1$ при $x > 0$.
2. Найдите инвариантные лучи уравнения $y' = \frac{2y}{x}$.
3. Для уравнения $y' = \frac{y}{x}$ условие $F(v) - v \neq 0$ не выполняется нигде. Следует ли отсюда неединственность?
4. Если $\varphi(2) = 3$ и $\psi(x) = 4\varphi(\frac{x}{4})$, через какую точку проходит график ψ?

Ответы. 1. $v' = \frac{1}{x}$, поэтому $y = x(\ln x + C)$. 2. Уравнение наклонов $2k = k$ даёт $k = 0$: два горизонтальных луча при обоих допустимых знаках x. 3. Нет. Общее решение $y = Cx$, и через каждую точку с $x \neq 0$ проходит единственное решение; неприменимость достаточной теоремы не является отрицательным результатом. 4. Через $(8, 12)$.

Частые ошибки

Пишут $y' = xv'$ и забывают слагаемое v; делят на $F(v) - v$ без поиска нулей; теряют $\ln|x|$ на отрицательной полуоси; считают всю прямую вместе с началом одним допустимым лучом; путают однородность нулевой степени с линейной однородностью; утверждают взаимное подобие всех кривых без учёта секторов. Перед каждым преобразованием проверяйте, обратимо ли оно в рассматриваемой области.

БИЛЕТ 11

Теорема существования и единственности для уравнения высшего порядка

Источники: Лекции: PDF 49-50; основной сборник: PDF 47-49; старый вопросник: PDF 23

Объём ответа: Точная формулировка; сведение к системе дано для понимания, полного доказательства общей теоремы билет не требует.

Доработка по фотографиям: вопрос 10

IMG_1968–IMG_1971; главы 11, 12.

Что требуется. Нормальная система, решение и задача Коши; ЛОС/ЛНС; теорема для непрерывных коэффициентов.

Верхний индекс в записи тетради $x^1, \dots, x^n$ — номер координаты. Для $\dot{x} = F(t, x)$ задача Коши задаёт все координаты $x(t_0) = x_0$. Непрерывность F и локальная липшицевость по вектору дают локальное существование и единственность. Непрерывные частные производные по координатам — достаточное условие липшицевости на малом прямоугольнике.

Для $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ с непрерывными A, f решение существует на всём общем интервале их непрерывности. На каждом компактном отрезке $\|F(t,u) - F(t,v)\| \le \|A(t)\|\|u - v\|$, а линейный рост по x исключает конечный взрыв внутри этого интервала.

Переход от $y^{(n)} = H(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ к системе: $x_1 = y, \dots, x_n = y^{(n-1)}$. Первые $n-1$ уравнений $\dot{x}_j = x_{j+1}$, последнее $\dot{x}_n = H(t, x_1, \dots, x_n)$. Нужно задать ровно n начальных значений.

Понять смысл

Уравнение второго порядка описывает изменение не только положения, но и скорости. Поэтому для однозначного движения обычно нужно задать две величины: положение и скорость в один момент. Для уравнения порядка n роль начального состояния играет набор из n чисел: значение функции и значения первых $n-1$ производных. Теорема отвечает на два разных вопроса: существует ли движение из такого состояния и может ли из него получиться больше одного движения.

Слова «разрешённое относительно старшей производной» означают, что уравнение записано как

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Именно $y^{(n)}$ выражена однозначно. Из неявного уравнения $(y'')^2 = y$ нельзя сразу получить одну такую задачу: выбор знака $y'' = \pm\sqrt{y}$ меняет уравнение. Если старшая производная умножена на коэффициент, сначала надо проверить, где этот коэффициент отличен от нуля.

Определения и точная формулировка

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто, а f определена в G. Решение на интервале I есть функция $y \in C^n(I)$, для которой

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G$$

и исходное равенство выполняется при каждом $x \in I$. Таким образом, проверяются и уравнение, и допустимость всех аргументов его правой части.

Задача Коши состоит в нахождении такого решения с условиями

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Все данные задаются в одной точке. Условия $y(a) = A$, $y(b) = B$ при $a \neq b$ образуют краевую задачу; рассматриваемая теорема к ней напрямую не относится.

Теорема. Пусть $f = f(x, z_0, \dots, z_{n-1})$ непрерывна в открытой области G, в ней существуют и непрерывны все частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}, \qquad j = 0, \dots, n-1,$$

а точка $(x_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ принадлежит G. Тогда существует $h > 0$, для которого задача Коши имеет решение на $[x_0 - h, x_0 + h]$, и это решение единственно локально. Точнее, любые два решения с указанными начальными данными совпадают на общем интервале определения, содержащем x_0, пока их графики лежат в G.

В записи f переменные z_j независимы. При проверке гипотез нельзя подставить предполагаемое решение, а потом продифференцировать по x: требуется частная производная правой части по одному фазовому аргументу. Производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ в условиях теоремы не нужна. Например, непрерывный коэффициент $|x|$ не мешает применению теоремы.

Непрерывность частных производных является удобным достаточным условием. Более общая версия требует непрерывности f и локального условия Липшица по вектору $(z_0, \dots, z_{n-1})$, равномерного по x в достаточно малой окрестности начальной точки. Отсутствие частной производной не доказывает неединственность: возможно, более слабое условие всё равно выполняется.

Почему получается именно такая теорема

Положим $t = x$ и введём состояние

$$u_1(t) = y(t), \quad u_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad u_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Тогда исходная задача превращается в нормальную систему

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ \quad \vdots \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = f(t, u_1, \dots, u_n), \end{cases} \qquad u(t_0) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})^{\mathsf{T}}.$$

Первые $n-1$ компонент правой части линейны по координатам состояния; их производные равны нулю или единице. Последняя компонента удовлетворяет гипотезам по условию. Значит, применима теорема существования и единственности для нормальной системы.

Обратный переход тоже важен. Из первых уравнений системы следует $u_2 = u_1'$, затем $u_3 = u_1''$ и так далее. Поэтому $y = u_1$ обладает n производными и удовлетворяет исходному уравнению. Нельзя ограничиться фразой «ввели переменные»: эквивалентность требует возможности вернуться к скалярной функции. Разные скалярные решения породили бы разные системные решения с одинаковым начальным вектором, что противоречит единственности системы.

Почему гладкость даёт Липшица? На небольшом замкнутом прямоугольнике внутри G все $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ ограничены. Соединяя два фазовых вектора отрезком и интегрируя производную f вдоль него, получаем

$$|f(x,z) - f(x,\tilde z)| \le L\|z - \tilde z\|.$$

Один и тот же L подходит для всех точек этого прямоугольника. Это объяснение связывает новый билет с теоремой первого порядка, но не заменяет полного доказательства общей теоремы Пикара.

Как применять теорему

1. Выделить старшую производную и записать f с независимыми фазовыми аргументами.
2. Указать открытую область, где правая часть имеет смысл. Особое внимание уделить знаменателям, логарифмам и корням.
3. Проверить непрерывность f и всех нужных частных производных в окрестности начальной точки.
4. Проверить принадлежность начальной точки области и сформулировать именно локальный вывод.

Для общей нелинейной задачи нельзя добавить «решение существует при всех x» только потому, что правая часть гладкая во всём пространстве. Например, для $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ функция

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1,$$

удовлетворяет задаче и не продолжается через $x = 1$ как конечное классическое решение. Правая часть при этом является многочленом.

Разобранный пример

Рассмотрим

$$y'' = y' + |x|y, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1.$$

Здесь $f(x, z_0, z_1) = z_1 + |x| z_0$ непрерывна на $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = |x|, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 1.$$

Обе производные непрерывны, начальная точка $(0, 2, -1)$ допустима. Следовательно, имеется единственное локальное решение. Недифференцируемость $|x|$ по x в нуле не нарушает ни одного условия.

Уравнение линейно; после сведения к системе её коэффициенты непрерывны на всей прямой. Теорема следующего билета дополнительно даст существование при всех $x \in \mathbb{R}$. Это отдельное обоснование глобальности, а не часть локального вывода.

Для сравнения, задача $xy'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ вообще не имеет классического решения в окрестности нуля: подстановка $x = 0$ потребовала бы $0 = 1$. Деление на x не устраняет это противоречие, а исключает начальную точку из области.

Ответ у доски

Назвать разрешённую форму, определить решение и выписать все n начальных данных. Затем назвать область G, непрерывность f, непрерывность частных производных по фазовым аргументам и допустимость начальной точки. Сделать локальный вывод. По просьбе объяснить механизм: вектор из функции и её производных превращает уравнение в систему первого порядка; первые строки обеспечивают обратный переход.

Проверка себя

1. Применима ли теорема к $y''' = \sin x + y^2 + e^{y''}$ при любых конечных начальных данных? **Ответ:** да, локально; все требуемые функции гладкие на $\mathbb{R}^4$.
2. Что можно утверждать для $y'' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = y'(0) = 0$ по сформулированной теореме? **Ответ:** эта версия теоремы неприменима. Более того, есть $y \equiv 0$ и решения $y = 0$ при $x \le a$, $y = \frac{(x-a)^4}{144}$ при $x \ge a$, $a \ge 0$; они класса C^2 и имеют те же данные в нуле.
3. Сколько условий нужно для задачи Коши четвёртого порядка? **Ответ:** четыре: y, y', y'', y''' в одной точке; $y^{(4)}(x_0)$ определяется уравнением.

Частые ошибки

Проверять только непрерывность f и заявлять единственность; забывать часть фазовых производных; требовать производную по x; смешивать задачу Коши с краевой; считать неприменимость теоремы доказательством отсутствия решения; делать глобальный вывод из локальной теоремы.

БИЛЕТ 12

Нормальные системы ОДУ. Линейные однородные и неоднородные системы

Источники: Лекции: PDF 51-55; основной сборник: PDF 50-55; старый вопросник: PDF 24-25

Объём ответа: Определения и теорема; обязательна проверка её условий для линейной системы. Обоснование глобального продолжения приведено отдельно.

Связь с фотографиями

Эта глава продолжает вопрос 10 тетради; доработка и точное соответствие находятся в начале главы 11.

Понять смысл

Несколько величин могут изменяться совместно: скорость одной зависит от текущих значений остальных. Нормальная система объединяет эти зависимости в одно векторное уравнение. Слово «нормальная» означает, что первые производные всех неизвестных уже выражены через независимую переменную и сами неизвестные. Оно не означает ни линейность, ни отсутствие особенностей.

Важнейшее различие нелинейной и линейной теорий касается времени существования. Для гладкой нелинейной системы обычно гарантирована лишь окрестность начального момента. Если же матрица линейной системы и свободный член непрерывны на интервале I, любое её решение существует на всём I. Это основание для последующих рассуждений о пространстве решений, фундаментальной матрице и вронскиане.

Определения

Нормальная система из n уравнений первого порядка имеет вид

$$u_i' = F_i(t, u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n, \qquad \text{или} \qquad u' = F(t, u).$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_n)^{\mathsf{T}}$, $F : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открыто. Решением на интервале I называется $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, график которого лежит в G и для которого $u'(t) = F(t, u(t))$ при всех $t \in I$. Задача Коши задаёт дополнительно один вектор

$$u(t_0) = u^0, \qquad (t_0, u^0) \in G.$$

Это n скалярных условий, а не одно скалярное условие.

Линейная система записывается как

$$u' = A(t)u + f(t), \qquad A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}.$$

Коэффициенты A и вектор f зависят только от t. При $f \equiv 0$ это линейная однородная система, сокращённо ЛОС. При $f \not\equiv 0$ это линейная неоднородная система, ЛНС. Например,

$u_1' = tu_1 + e^t u_2$ линейно по неизвестным, хотя коэффициенты не постоянны; слагаемые $u_1 u_2$, u_1^2, $\sin u_2$ делают систему нелинейной.

Точная локальная теорема

Теорема. Пусть F непрерывна в открытой области G, все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ существуют и непрерывны в G. Тогда для каждой точки $(t_0, u^0) \in G$ существует $h > 0$ и единственное локальное решение задачи Коши на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Два решения с этими данными совпадают на общем интервале определения, содержащем t_0.

Как и в скалярном случае, условие на производные можно заменить локальным условием Липшица по всему вектору u. При этом норма измеряет расстояние между состояниями, а не покомпонентное совпадение только одной координаты:

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \le L\|u - v\|.$$

Чтобы получить один L, выбирают небольшую выпуклую по u окрестность внутри G и оценивают на ней матрицу производных.

Для количественной оценки можно взять цилиндр

$$|t - t_0| \le a, \qquad \|u - u^0\| \le b$$

целиком внутри G и обозначить через M максимум $\|F\|$ на нём. Тогда стандартная теорема даёт гарантированный шаг $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ при $M > 0$. При $M = 0$ можно взять $h = a$. В старом вопроснике используется шар радиуса r в пространстве (t, u) и оценка $h = \frac{r}{\sqrt{1+M^2}}$. Это два способа контролировать выход графика из выбранной окрестности; они не определяют максимальный интервал решения.

Применение к линейной системе

Теорема. Если все элементы $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны на интервале I, то при любых $t_0 \in I$ и $u^0 \in \mathbb{R}^n$ задача

$$u' = A(t)u + f(t), \qquad u(t_0) = u^0$$

имеет единственное решение на всём I.

Локальная часть: обязательная проверка. Полагаем $F(t,u) = A(t)u + f(t)$ на $G = I \times \mathbb{R}^n$. Каждая компонента

$$F_i(t,u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j + f_i(t)$$

непрерывна по всем аргументам. Кроме того,

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = a_{ij}(t),$$

и эта производная непрерывна. Начальная точка допустима для любого конечного u^0. Поэтому локальные существование и единственность доказаны. Та же мысль выражается оценкой

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \le \|A(t)\|\,\|u - v\|.$$

На каждом компактном временном отрезке норма $A(t)$ имеет конечный максимум.

Почему решение продолжается на весь интервал. Этот дополнительный шаг нужен, если требуется обосновать глобальную формулировку. Зафиксируем $T > t_0$, $[t_0, T] \subset I$, и выберем $K, B \geq 0$ так, что $\|A(t)\| \leq K$, $\|f(t)\| \leq B$ на этом отрезке. Интегральная запись даёт

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| + B(T - t_0) + K \int_{t_0}^{t} \|u(s)\|\, ds.$$

Обозначим первую сумму через a, а правую часть через $q(t)$. Тогда $\|u(t)\| \leq q(t)$, $q(t_0) = a$ и $q' \leq Kq$. Следовательно,

$$(e^{-K(t-t_0)} q(t))' \leq 0, \qquad \|u(t)\| \leq a e^{K(t-t_0)}.$$

Решение не может стать бесконечным до T. Более того, $\|u'\| \leq Kae^{K(T-t_0)} + B$, поэтому оно липшицево по времени и имеет конечный предел при любом предполагаемом конечном правом конце $\beta < T$. В точке $(\beta, \lim_{t \uparrow \beta} u(t))$ снова применима локальная теорема. Она продолжает решение и противоречит максимальности β. Слева рассуждение повторяется с обратным направлением времени. Так как любой конечный компактный отрезок внутри I допустим, решение определено на всём I.

Разобранный пример

Решим систему

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + 2u_2, \\ u_2' = -u_2 + e^t, \end{cases} \qquad u_1(0) = a, \quad u_2(0) = b.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ постоянна, $f = (0, e^t)^{\mathsf{T}}$ непрерывен на $\mathbb{R}$. До вычислений уже известно, что задача имеет ровно одно глобальное решение.

Второе уравнение независимо от u_1. Умножая его на e^t, получаем $(e^t u_2)' = e^{2t}$, откуда

$$u_2(t) = \frac{1}{2} e^t + \left(b - \frac{1}{2}\right) e^{-t}.$$

Теперь $u_1' - u_1 = e^t + (2b - 1)e^{-t}$, поэтому

$$(e^{-t} u_1)' = 1 + (2b - 1)e^{-2t}.$$

Интегрирование от 0 до t сразу учитывает данные:

$$u_1(t) = e^t \left[a + t + \left(b - \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-2t}) \right].$$

Подстановка $t = 0$ проверяет оба начальных условия. Второе равенство проверяется непосредственно, первое удобно проверить в форме $(e^{-t} u_1)' = 2e^{-t} u_2$. Возрастание решения при $t \to \infty$ не противоречит глобальному существованию: для каждого конечного t обе компоненты конечны.

Ответ у доски

Записать $u' = F(t, u)$; определить решение и векторное начальное условие; сформулировать локальную теорему. После этого записать $A(t)u + f(t)$, различить ЛОС и ЛНС и вычислить

$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = a_{ij}$. Отдельно произнести глобальный линейный результат. Если спрашивают, почему «на всём интервале», объяснить ограниченность решения на любом компактном временном отрезке и продолжение через конечный предел.

Проверка себя

1. Линейна ли система $u_1' = tu_2$, $u_2' = u_1 + \sin t$? **Ответ:** да, ЛНС; $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = (0, \sin t)^{\mathsf{T}}$; все задачи Коши глобально разрешимы на $\mathbb{R}$.
2. Что гарантирует теорема для $u' = \frac{u}{t}$ при $u(1) = 2$? **Ответ:** единственное решение на $(0, \infty)$, а именно $u = 2t$. Эта конкретная функция продолжается через нуль, но уравнение в нуле не определено.
3. Обязано ли решение гладкой нелинейной системы быть глобальным? **Ответ:** нет; $u_1' = u_1^2$, $u_2' = 0$, $u(0) = (1, 0)^{\mathsf{T}}$ даёт $u_1 = \frac{1}{1-t}$.

Частые ошибки

Считать любую систему с переменными коэффициентами нелинейной; определять однородность по отсутствию постоянных чисел вместо условия $f \equiv 0$; проверять только диагональные частные производные; выводить глобальность непосредственно из локальной теоремы; путать существование на всей прямой с ограниченностью решения.

БИЛЕТ 13

Линейная зависимость вектор-функций и вронскиан

Источники: Лекции: PDF 57-60; основной сборник: PDF 56-59; старый вопросник: PDF 26-27

Объём ответа: Доказать связи между зависимостью функций, их значений и вронскианом; отдельно доказать лемму для решений одной ЛОС.

Доработка по фотографиям: вопрос 11

IMG_1972–IMG_1974; главы 13.

Что требуется. Определения с кванторами; импликации; специальная лемма для решений одной ЛОС.

Линейная зависимость означает существование одного ненулевого набора постоянных c_j, для которого $\sum c_j x_j(t) = 0$ при всех t. Коэффициенты, выбранные заново в каждой точке, не являются такой зависимостью.

Для произвольных вектор-функций $W(t) \equiv 0$ не влечёт зависимости. Например, $x_1 = (1, t)^T$, $x_2 = (t, t^2)^T$: определитель нулевой всюду, но из $c_1 + c_2 t \equiv 0$ следуют $c_1 = c_2 = 0$.

Восстановим специальную лемму. Если все x_j решают одну ЛОС, из $W(t_0) = 0$ получаем ненулевые постоянные c_j с $z(t_0) = \sum c_j x_j(t_0) = 0$. Суперпозиция делает z решением той же ЛОС. Единственность задачи с нулевым начальным вектором даёт $z \equiv 0$. Здесь используются оба условия: одна и та же система и единственность.

Понять смысл: два разных вида зависимости

Векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы, если один нетривиальный набор чисел превращает их линейную комбинацию в нуль. Для функций требуется больше: одни и те же числа должны давать нуль при всех значениях аргумента. Если в каждой точке разрешить выбирать новые коэффициенты, получится другое, существенно более слабое условие.

Этот билет нужен, чтобы перейти от отдельных найденных решений к базису всего пространства решений. Вронскиан быстро проверяет независимость значений. Но превратить информацию в одной точке в утверждение на интервале можно лишь при дополнительных условиях. Для решений одной линейной однородной системы эту роль выполняет единственность задачи Коши.

Определения и порядок кванторов

Пусть $u^1, \dots, u^k : I \to \mathbb{R}^n$. Они **линейно зависимы на** I, если существуют постоянные $c_1, \dots, c_k$, не все нулевые, такие что

$$\sum_{j=1}^{k} c_j u^j(t) = 0 \qquad \text{при всех } t \in I.$$

Они **линейно независимы**, если такое тождество возможно лишь при $c_1 = \dots = c_k = 0$. Для скалярных функций определение то же, только значения лежат в $\mathbb{R}$. Можно также работать над $\mathbb{C}$, но поле коэффициентов надо сохранять во всём рассуждении.

Зависимость функций означает

$$\exists c \neq 0 \;\; \forall t \in I : \; \sum_j c_j u^j(t) = 0.$$

Зависимость значений в каждой точке означает

$$\forall t \in I \;\; \exists c(t) \neq 0 : \; \sum_j c_j(t) u^j(t) = 0.$$

Переставить эти кванторы нельзя. Функции $1, t, t^2$ могут быть независимы как скалярные функции, хотя любые два их значения при фиксированном t являются числами, то есть векторами одномерного пространства.

Для ровно n вектор-функций размерности n определим матрицу и её **вронскиан**:

$$X(t) = (u^1(t) \;\cdots\; u^n(t)), \qquad W(t) = \det X(t).$$

Столбец есть целая вектор-функция. Производные в этом определении не добавляются: скалярный вронскиан с производными появится в билете 17 после перехода к системе.

Общие утверждения и доказательства

1. Зависимость функций влечёт зависимость значений в любой точке. Пусть $\sum_j c_j u^j(t) \equiv 0$ с фиксированным ненулевым набором c. При любом $t_0 \in I$ подстановка $t = t_0$ даёт $\sum_j c_j u^j(t_0) = 0$. Коэффициенты остались теми же и не стали все нулевыми. Значит, векторы значений зависимы.

Обратное утверждение неверно. На $I = \mathbb{R}$ рассмотрим

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В каждой точке два вектора коллинеарны. Но тождество $c_1 + c_2 t \equiv 0$ даёт при $t = 0$ число $c_1 = 0$, затем при $t = 1$ число $c_2 = 0$. Поэтому вектор-функции независимы.

2. Для n вектор-функций зависимость влечёт $W \equiv 0$. По предыдущему пункту столбцы $X(t)$ зависимы при каждом фиксированном t. По свойству определителя $\det X(t) = 0$ при всех $t \in I$. Для этого результата не требуются дифференцируемость функций или наличие какого-либо ОДУ.

3. Если $W(t_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке, функции независимы. Если бы они были зависимы, пункт 2 дал бы $W(t_0) = 0$. Получено противоречие. Можно рассуждать прямо: из $X(t)c \equiv 0$ следует $X(t_0)c = 0$; невырожденность $X(t_0)$ даёт $c = 0$.

Обратное к пункту 2 для произвольных функций неверно: у только что рассмотренных u^1, u^2 вронскиан тождественно нулевой, но функции независимы. Даже гладкость обеих функций не спасает обратное утверждение.

Главная лемма для решений ЛОС

Лемма. Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, где I есть интервал, а $u^1, \dots, u^n$ являются решениями *одной и той же* системы $u' = A(t)u$. Если $W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$, то эти решения линейно зависимы на всём I и $W \equiv 0$ на I.

Доказательство. Нулевой определитель $X(t_0)$ означает существование числового вектора $c \neq 0$ такого, что $X(t_0)c = 0$. Зафиксируем этот набор чисел и введём

$$v(t) = X(t)c = \sum_{j=1}^{n} c_j u^j(t).$$

Благодаря линейности и постоянству коэффициентов

$$v'(t) = \sum_j c_j (u^j)'(t) = \sum_j c_j A(t) u^j(t) = A(t)v(t).$$

Кроме того, $v(t_0) = 0$. Нулевая функция также удовлетворяет системе и тем же начальным данным. Непрерывность A обеспечивает единственность задачи Коши на I, поэтому $v(t) \equiv 0$. Полученное тождество использует один фиксированный ненулевой набор c; это именно линейная зависимость функций. По общему утверждению их вронскиан равен нулю всюду. Доказательство завершено.

Здесь нельзя опустить предложение о том, что линейная комбинация является решением. Именно оно позволяет применить единственность. Для произвольных функций нет общей задачи Коши, в которой можно было бы сравнить v с нулевым решением.

Альтернатива для вронскиана. У n решений одной ЛОС с непрерывной матрицей возможны ровно два случая:

- решения зависимы и $W(t) = 0$ при всех $t \in I$;
- решения независимы и $W(t) \neq 0$ при всех $t \in I$.

Независимость означает, что первый случай невозможен; если бы во втором случае появился хотя бы один нуль, лемма вернула бы нас в первый. Поэтому у фундаментального вронскиана не бывает изолированных нулей.

Более общая версия не требует $k = n$: если k решений одной ЛОС имеют зависимые значения в одной точке, то сами решения зависимы. Доказательство тем же $v = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j$ дословно сохраняется. Однако для прямого использования квадратного определителя $n \times n$ нужно именно n столбцов. При $k < n$ можно исследовать ранг матрицы значений.

Разобранные применения

Пусть $u' = \operatorname{diag}(1,-1)u$. Даны

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Сначала проверяем, что обе функции действительно решают одну систему: производная первой компоненты совпадает с ней самой, производная второй равна её отрицанию. Затем

$$W(t) = e^t(-e^{-t}) - 2e^t e^{-t} = -3 \neq 0.$$

Следовательно, решения независимы на всей прямой. Для этого вывода было бы достаточно $W(0) = -3$ вместе с принадлежностью одной ЛОС.

Теперь предположим, что предложены «два решения непрерывной ЛОС на $(-1,1)$» с матрицей столбцов

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Их вронскиан равен t: он нулевой при 0 и ненулевой при $\frac{1}{2}$. По альтернативе такое описание невозможно. Не требуется угадывать $A(t)$: несовместимость уже доказана. На интервале $(0,1)$ препятствия нет; там можно определить $A = X'X^{-1}$, и она непрерывна.

Ответ у доски

Сначала подчеркнуть постоянство коэффициентов в определении зависимости. Затем доказать цепочку «зависимость функций $\Rightarrow$ зависимость значений $\Rightarrow W \equiv 0$» и её контрапозицию. Показать один контрпример к обращению. Для специальной леммы произнести пять шагов: нулевой определитель; фиксированный ненулевой набор коэффициентов; линейная комбинация решений; нулевые начальные данные; единственность. Закончить альтернативой для вронскиана.

Проверка себя

1. Может ли ненулевое решение ЛОС обратиться в нулевой *вектор* в один момент? **Ответ:** нет: оно совпало бы с нулевым решением по единственности. Отдельная компонента обращаться в нуль может.
2. Зависимы ли $u^1 = (\cos t, \sin t)^{\mathsf{T}}$ и $u^2 = (-\sin t, \cos t)^{\mathsf{T}}$? **Ответ:** нет; $W = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
3. У n произвольных вектор-функций $W(t_0) = 0$. Доказана ли зависимость? **Ответ:** нет; доказана лишь зависимость их значений в точке. Даже $W \equiv 0$ в общем случае недостаточно.
4. Почему интервал важнее произвольного множества? **Ответ:** единственность переносит равенство по связному интервалу. На несвязных частях можно выбирать разные комбинации и начальные данные независимо.

Частые ошибки

Разрешать коэффициентам зависимости меняться с t; считать $W(t_0) = 0$ универсальным критерием зависимости; применять лемму к решениям разных систем или к ЛНС; путать нуль одной координаты с нулём вектора; добавлять в системный вронскиан лишние строки производных.

БИЛЕТ 14

Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица ЛОС

Источники: Лекции: PDF 60-63; основной сборник: PDF 60-65; старый вопросник: PDF 28-29

Объём ответа: Определения; полное доказательство теоремы об общем решении; формулировка перехода между фундаментальными матрицами.

Доработка по фотографиям: вопрос 12

IMG_1975–IMG_1976; главы 14.

Что требуется. Теорема об общем решении; размерность; переход между фундаментальными матрицами.

Для системы размера n ФСР содержит ровно n независимых векторных решений. Если $X(t)$ составлена из них по столбцам, $\det X(t) \neq 0$ во всех точках интервала. Для любого решения u сначала решаем обычную систему $X(t_0)c = u(t_0)$. Единственность даёт $u(t) = X(t)c$ на всём интервале: коэффициенты постоянны.

Если Y — другая фундаментальная матрица, каждый её столбец есть постоянная комбинация столбцов X, поэтому $Y = XC$ с постоянной невырожденной C. Обратно, такое произведение даёт фундаментальную матрицу. При заданных X, Y матрица перехода единственна: $C = X(t_0)^{-1}Y(t_0)$.

Нормированная матрица $\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$ имеет $\Phi(t_0, t_0) = E$. Умножение справа и порядок множителей обязательны; $X(t_0)^{-1}X(t)$ в общем случае задаёт другую матрицу.

Понять смысл

Для линейной однородной системы отдельные решения складываются, а их постоянные кратные остаются решениями. Поэтому множество решений похоже на пространство векторов. Отличие лишь в том, что его элементы являются функциями. Фундаментальная система играет роль базиса: найдя n подходящих решений, мы получаем все остальные одной линейной комбинацией.

Почему достаточно ровно n решений? Начальное состояние принадлежит $\mathbb{R}^n$. Если выбранные решения в момент t_0 образуют базис этого пространства, то их комбинацией можно получить любое начальное состояние. Единственность задачи Коши затем заставляет полученную комбинацию совпасть с нужным решением во все остальные моменты.

Определения и точная теорема

Весь билет рассматривает систему

$$u' = A(t)u, \qquad A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n}),$$

на одном интервале I. **Фундаментальная система решений**, или ФСР, есть набор из n линейно независимых решений $u^1, \dots, u^n$ на I. По билету 13 их значения образуют базис $\mathbb{R}^n$ в каждый момент времени.

Фундаментальная матрица есть матрица из этих столбцов:

$$X(t) = (u^1(t) \ \cdots \ u^n(t)).$$

Эквивалентные условия: $X \in C^1$, $X' = AX$ и $\det X(t) \neq 0$ на I. Для проверки достаточно уравнения $X' = AX$ и невырожденности в одной точке: затем работает альтернатива вронскиана.

Теорема об общем решении. Если $u^1, \dots, u^n$ образуют ФСР, то множество всех решений системы на I имеет вид

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u^j(t) = X(t)C, \qquad C \in \mathbb{R}^n.$$

Для каждого решения вектор постоянных C единственен. В частности, решение задачи Коши $u(t_0) = u^0$ равно

$$u(t) = X(t)X(t_0)^{-1}u^0.$$

Полное доказательство общего решения

Шаг 1. Любая указанная комбинация является решением. При постоянном C имеем $(XC)' = X'C = AXC$. В покомпонентной форме это обычная линейность дифференцирования. Если вместо C взять произвольную функцию $C(t)$, появится дополнительное слагаемое XC', поэтому постоянство здесь существенно.

Шаг 2. Любое решение представимо указанным способом. Пусть $v(t)$ есть произвольное решение, $t_0 \in I$. Так как $X(t_0)$ невырождена, алгебраическая система

$$X(t_0)C = v(t_0)$$

имеет единственное числовое решение $C = X(t_0)^{-1}v(t_0)$. Рассмотрим $w(t) = X(t)C$. По шагу 1 это решение ЛОС. По выбору C выполнено $w(t_0) = v(t_0)$. Теорема единственности для линейной системы даёт $w \equiv v$ на I. Тем самым доказано, что комбинации ФСР исчерпывают все решения, а не только некоторую их часть.

Шаг 3. Коэффициенты представления единственны. Если $XC = XD$ для всех t, то при $t = t_0$ получаем $X(t_0)(C - D) = 0$. Невырожденность даёт $C = D$. Можно также сослаться на независимость ФСР, но уравнение в одной точке делает причину особенно прозрачной.

Существование ФСР. Зафиксируем $t_0 \in I$. Для каждого стандартного базисного вектора e_j решим задачу $u' = Au$, $u(t_0) = e_j$. По билету 12 все n решений существуют на I. Матрица их значений в t_0 равна E, поэтому её определитель равен единице. По билету 13 они независимы и образуют ФСР. Значит, определение ФСР не предполагает существование неизвестного объекта без доказательства.

Из доказанного следует, что пространство решений имеет размерность ровно n. Линейное отображение $u \mapsto u(t_0)$ из пространства решений в $\mathbb{R}^n$ биективно: существование даёт сюръективность, единственность даёт инъективность.

Переход между фундаментальными матрицами

Теорема. Если X есть фундаментальная матрица, то все фундаментальные матрицы той же системы и на том же интервале имеют вид

$$Y(t) = X(t)P,$$

где P есть постоянная невырожденная матрица. Важно, что множитель стоит *справа*.

Краткое обоснование полезно даже при требовании только формулировки. Каждый столбец Y является решением и потому имеет единственное разложение по столбцам X с постоянными коэффициентами. Соберём коэффициенты столбцов в матрицу P: получится $Y = XP$. Из $\det Y = \det X \det P \neq 0$ следует $\det P \neq 0$. Обратно, если P постоянна и невырождена, то $(XP)' = AXP$ и $\det(XP) \neq 0$. Все условия фундаментальности выполнены.

Для фиксированного t_0 единственная фундаментальная матрица с начальным значением E называется нормированной в t_0:

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}, \qquad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Она не зависит от выбора X: при замене X на XP матрицы P и P^{-1} сокращаются в правильном порядке.

Разобранный пример

Рассмотрим систему $u_1' = u_1 + u_2$, $u_2' = u_2$. Второе уравнение даёт $u_2 = C_2 e^t$, затем $u_1' - u_1 = C_2 e^t$, откуда $u_1 = e^t(C_1 + C_2 t)$. Таким образом,

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка даёт $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, а $\det X = e^{2t} \neq 0$. Следовательно, это фундаментальная матрица, причём $X(0) = E$.

Найдём решение с $u(1) = (2, 1)^{\mathsf{T}}$. Условие $X(1)C = u(1)$ даёт

$$eC_2 = 1, \qquad e(C_1 + C_2) = 2,$$

поэтому $C_1 = C_2 = e^{-1}$. Искомое решение:

$$u(t) = e^{t-1} \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, начальные значения удобно задавать в любой точке, а не только там, где $X = E$.

Если выбрать новый базис $v^1 = u^1$, $v^2 = u^1 + u^2$, получим

$$Y = XP, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это другая фундаментальная матрица той же системы. Один и тот же вектор решения записывается как $XC = YD$ при $D = P^{-1}C$; поменялись координаты, но не решение.

Ответ у доски

Сначала назвать систему, непрерывность коэффициентов и интервал. Дать определения ФСР и фундаментальной матрицы. В доказательстве общего решения не пропускать обратную часть: выбрать произвольное решение, подобрать коэффициенты по его значению в t_0, применить единственность. Затем сказать, почему коэффициенты единственны и почему ФСР существует. Завершить формулой $Y = XP$ с постоянной невырожденной матрицей справа.

Проверка себя

1. Обязана ли фундаментальная матрица удовлетворять $X(t_0) = E$? **Ответ:** нет; это дополнительная нормировка.
2. Достаточно ли $\det X \neq 0$, чтобы X была фундаментальной матрицей заданной системы? **Ответ:** нет; необходимо также $X' = AX$.
3. Почему PX в общем случае не есть фундаментальная матрица? **Ответ:** $(PX)' = PAX$, тогда как требуется APX; матрицы P и A не обязаны коммутировать.
4. Для $X(t) = \operatorname{diag}(e^t, e^{-t})$ найдите решение с $u(2) = (3, 4)^\mathsf{T}$. **Ответ:** $u = (3e^{t-2}, 4e^{2-t})^\mathsf{T}$.

Частые ошибки

Принимать любые n решений за ФСР; забывать проверку независимости; доказывать лишь то, что комбинация является решением; умножать матрицу перехода слева; разрешать её коэффициентам зависеть от времени; писать $C = u^0$, когда $X(t_0) \neq E$.

БИЛЕТ 15

Производная определителя и формула Лиувилля-Остроградского

Источники: Лекции: PDF 64-67; основной сборник: PDF 66-69; старый вопросник: PDF 30-31

Объём ответа: Обе формулы сформулировать для общего n; обе доказать при $n = 2$.

Доработка по фотографиям: вопрос 13

IMG_1977–IMG_1979; главы 15.

Что требуется. Общая формула производной определителя; доказательство при n=2; формула Лиувилля при n=2.

Для $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ имеем $W = uz - vw$ и

$$W' = u'z + uz' - v'w - vw'.$$

Если $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, подставляем $u' = au + bw$, $v' = av + bz$, $w' = cu + dw$, $z' = cv + dz$. После раскрытия взаимно уничтожаются члены с b, c, остаётся $W' = (a + d)W$.

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Не делим на W в доказательстве, пока не разобран нулевой случай. Уравнение $W' = \operatorname{tr} A \, W$ линейно, и его формула верна также при $W(t_0) = 0$. Следовательно, определитель либо нигде не нулевой, либо тождественно нулевой.

Понять смысл

Фундаментальная матрица переносит начальные состояния вдоль решений. Её определитель измеряет, во сколько раз меняется ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на эти состояния. Поразительный факт состоит в том, что для этого определителя получается одно скалярное уравнение: скорость изменения объёма зависит только от суммы диагональных коэффициентов системы.

Поэтому вронскиан нередко можно найти, вообще не решая исходную систему. Если известен след матрицы и одно значение определителя, формула Лиувилля-Остроградского даёт все остальные значения. Она также ещё раз объясняет альтернативу: определитель либо всегда нулевой, либо никогда не обращается в нуль.

Формула дифференцирования определителя

Пусть $B(t)$ есть квадратная матрица размера n, все её элементы дифференцируемы на интервале I. Обозначим её строки через $r_1(t), \dots, r_n(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\det B(t) = \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_k'(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}.$$

В каждом слагаемом дифференцируется ровно одна строка, остальные остаются прежними. Столь же верна формула с заменой одного столбца на его производную. Невырожденность B не нужна.

Полное доказательство при $n = 2$. Для $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеем $\det B = ad - bc$. По правилу производной произведения

$$(\det B)' = a'd + ad' - b'c - bc' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

Это и есть формула по строкам. Перегруппировав те же четыре слагаемых иначе, получим формулу по столбцам:

$$(\det B)' = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}.$$

Общий случай следует из формулы определителя как суммы произведений и правила дифференцирования произведения, но его развёрнутое доказательство не входит в указанное требование билета.

Особенно важно не перепутать результат с $\det B'$. Например, для $B(t) = \operatorname{diag}(t, t)$ получаем $(\det B)' = 2t$, тогда как $\det B' = 1$. Производная определителя и определитель матрицы производных являются разными операциями.

Точная формула Лиувилля-Остроградского

Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, а $u^1, \dots, u^n$ являются любыми n решениями системы $u' = A(t)u$ на I. Обозначим

$$X = (u^1 \ \cdots \ u^n), \qquad W = \det X, \qquad \operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Тогда для каждого $t_0 \in I$ и всех $t \in I$

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t)\, W(t), \qquad W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

Не требуется, чтобы решения образовывали ФСР: зависимый набор, для которого $W \equiv 0$, тоже включён. Не требуется и дифференцируемость A: непрерывность коэффициентов уже обеспечивает нужную дифференцируемость решений.

Полное доказательство при $n = 2$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и

$$u^1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad u^2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \qquad W = ps - rq.$$

Из уравнений для обоих столбцов следует

$$p' = ap + bq, \quad q' = cp + dq, \quad r' = ar + bs, \quad s' = cr + ds.$$

Дифференцируем W и подставляем все четыре равенства:

$$\begin{aligned} W' &= p's + ps' - r'q - rq' \\ &= (ap + bq)s + p(cr + ds) - (ar + bs)q - r(cp + dq) \\ &= aps + bqs + cpr + dps - arq - bsq - crp - drq \\ &= (a + d)(ps - rq) = (\operatorname{tr} A)W. \end{aligned}$$

Смешанные слагаемые взаимно уничтожились. Именно поэтому в итоговом уравнении осталась сумма диагональных элементов.

Теперь положим $T(t) = \int_{t_0}^{t} (a(s) + d(s))\, ds$. Так как $T' = a + d$,

$$(e^{-T(t)}W(t))' = e^{-T(t)}(W'(t) - (a + d)W(t)) = 0.$$

Значит, $e^{-T(t)}W(t)$ постоянно на интервале и равно своему значению при t_0, то есть $W(t_0)$. Умножая на $e^{T(t)}$, получаем требуемую формулу.

Этот способ не делит на W и сразу охватывает нулевой вронскиан. В лекционной записи сначала разбираются случаи $W(t_0) = 0$ и $W(t_0) \neq 0$, а для второго интегрируется $(\ln |W|)'$. Оба пути верны. Если выбран логарифмический путь, перед делением надо сослаться на альтернативу вронскиана и в конце восстановить его знак по начальному значению.

Что из формулы следует

Экспонента вещественного интеграла положительна. Поэтому $W(t_0) = 0$ влечёт $W \equiv 0$, а $W(t_0) \neq 0$ влечёт сохранение ненулевого значения и знака на всём I. При $\operatorname{tr} A \equiv 0$ любой вронскиан постоянен. Это не означает, что каждое решение постоянно: может меняться форма параллелепипеда при неизменном объёме.

Для фундаментальной матрицы можно также восстановить след:

$$\operatorname{tr} A(t) = \frac{W'(t)}{W(t)}.$$

Но это лишь одна скалярная характеристика матрицы; по ней нельзя восстановить все коэффициенты системы. Равенство $W' = 0$ не означает $A = 0$.

Разобранный пример

Пусть X есть матрица решений системы с

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ e^t & 2 - t \end{pmatrix}, \qquad \det X(1) = -3.$$

Найти столбцы X явно непросто, но след равен 2. Следовательно,

$$\det X(t) = -3 \exp\left(\int_1^t 2\, ds \right) = -3e^{2(t-1)}.$$

Определитель нигде не равен нулю; поэтому столбцы образуют ФСР на $\mathbb{R}$. Знак всегда отрицателен. При $t = 1$ формула возвращает -3, а производная $W' = 2W$ даёт независимую проверку.

Для системы вращения $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\operatorname{tr} A = 0$. Её нормированная фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1. Столбцы поворачиваются, хотя определитель не изменяется. Так геометрический смысл формулы виден без вычисления интеграла.

Ответ у доски

Сформулировать правило замены одной строки на производную и доказать его раскрытием определителя 2×2. Затем записать общую формулу Лиувилля-Остроградского, указав непрерывность A и принадлежность столбцов одной ЛОС. В доказательстве при $n = 2$ явно получить $W' = (a + d)W$, после чего применить интегрирующий множитель. В конце отметить, что случай $W = 0$ не потерян.

Проверка себя

1. Если $\operatorname{tr} A(t) = 2t$ и $W(0) = 5$, чему равен $W(t)$? **Ответ:** $5e^{t^2}$.
2. Может ли вронскиан одной ЛОС с непрерывными коэффициентами равняться $\sin t$ на $(-1, 1)$? **Ответ:** нет; он имеет нуль и одновременно ненулевые значения.
3. Если $W(t) = 7e^{-3t}$, какой след у матрицы системы? **Ответ:** -3; отдельные элементы матрицы не определены.
4. Для $B(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$ найдите $(\det B)'$. **Ответ:** $e^t + te^t - 2t$, что также получается суммой двух определителей с производными строк.

Частые ошибки

Дифференцировать все строки одновременно в одном определителе; подставлять в экспоненту $\det A$ вместо $\operatorname{tr} A$; забывать множитель $W(t_0)$; терять знак при логарифмировании; делить на нулевой вронскиан; применять формулу к столбцам, которые не являются решениями одной однородной системы.

БИЛЕТ 16

Структура общего решения ЛНС. Вариация постоянных

Источники: Лекции: PDF 67-70; основной сборник: PDF 70-73; старый вопросник: PDF 32

Объём ответа: Доказать связь общего решения ЛНС и ЛОС; вывести и объяснить метод вариации постоянных.

Доработка по фотографиям: вопрос 14

IMG_1980–IMG_1982; главы 16.

Что требуется. Доказать структуру общего решения; вывести вариацию постоянных для системы.

Фиксируем одно частное решение u_p уравнения $u' = A(t)u + f(t)$. Разность любого решения u и u_p удовлетворяет $z' = Az$, а сумма $u_p + z$ вновь решает ЛНС. Это обе стороны утверждения $u = u_p + u_h$.

Положим $u = X(t)c(t)$, $X' = AX$. Тогда

$$X'c + Xc' = AXc + f, \qquad Xc' = f, \qquad c' = X^{-1}f.$$

Интегрируем с фиксированным нижним пределом:

$$u(t) = X(t)\left[c_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds\right], \quad c_0 = X(t_0)^{-1}u_0.$$

Обратная матрица стоит слева от вектора f. В записи с неопределённым интегралом константа — постоянный вектор; нельзя дважды учитывать её и в интеграле, и ещё одним независимым набором.

Понять смысл

У однородной системы нет внешнего воздействия: $u' = Au$. Неоднородная система $u' = Au + f$ содержит заданную добавку $f(t)$. Если два движения испытывают одну и ту же добавку, то при вычитании она исчезает. Поэтому разность любых двух решений ЛНС подчиняется однородной системе.

Отсюда возникает простая конструкция: достаточно найти одно частное решение u_p неоднородной системы. Все остальные получаются прибавлением к нему произвольного решения однородной. Слово «частное» означает здесь один фиксированный представитель; не обязательно решение с определёнными начальными данными.

Точная теорема и доказательство

Пусть $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$, а u_p есть некоторое решение $u' = Au + f$ на I. Тогда все решения ЛНС и только они имеют вид

$$u(t) = u_p(t) + v(t), \qquad v' = A(t)v.$$

Если X есть фундаментальная матрица соответствующей ЛОС, то общее решение ЛНС записывается как

$$u(t) = u_p(t) + X(t)C, \qquad C \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство в прямую сторону. Для любого однородного решения v дифференцирование даёт

$$(u_p + v)' = u_p' + v' = Au_p + f + Av = A(u_p + v) + f.$$

Следовательно, указанная сумма является решением ЛНС.

Доказательство полноты. Пусть u есть произвольное решение ЛНС. Тогда

$$(u - u_p)' = (Au + f) - (Au_p + f) = A(u - u_p).$$

Значит, $v = u - u_p$ есть решение ЛОС. По теореме билета 14 существует единственный постоянный вектор C такой, что $v = XC$. Поэтому других решений, не описанных формулой, нет. Доказательство завершено.

Множество решений ЛНС является сдвигом линейного пространства решений ЛОС, то есть аффинным множеством. В общем случае оно само не является линейным пространством: нулевая функция не решает систему с $f \not\equiv 0$, а сумма двух решений имеет свободный член $2f$, а не f.

Полезное уточнение: если u^1, u^2 решают одну ЛНС, то $\alpha u^1 + \beta u^2$ решает ту же ЛНС при $\alpha + \beta = 1$. Если же u^1 решает систему с воздействием f_1, а u^2 с воздействием f_2, их сумма решает систему с воздействием $f_1 + f_2$. Во всех этих утверждениях матрица A должна быть одной и той же.

Вывод метода вариации постоянных

В однородном случае $u = XC$ с постоянным вектором C. Для неоднородного случая разрешим коэффициентам меняться:

$$u(t) = X(t)c(t).$$

Это не догадка, ограничивающая класс решений: $X(t)$ обратима, поэтому для любой функции u можно определить $c = X^{-1}u$. Если u дифференцируема, то и c дифференцируема.

Дифференцируем произведение и используем $X' = AX$:

$$u' = X'c + Xc' = AXc + Xc'.$$

С другой стороны, исходное уравнение требует $u' = AXc + f$. После сокращения общего слагаемого получаем

$$X(t)c'(t) = f(t), \qquad c'(t) = X(t)^{-1}f(t).$$

Итак, задача дифференциальной связи компонент превратилась в покомпонентное интегрирование известного вектора. При фиксированном $t_0 \in I$

$$c(t) = C + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds,$$

и потому

$$u(t) = X(t) \left(C + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds \right).$$

Обратная матрица стоит внутри интеграла и вычисляется в переменной s. Выносить её из интеграла как постоянную матрицу нельзя.

При начальном условии $u(t_0) = u^0$ имеем $C = X(t_0)^{-1} u^0$. Поэтому

$$u(t) = X(t) X(t_0)^{-1} u^0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} f(s)\, ds.$$

Первое слагаемое переносит начальное состояние, второе учитывает воздействие. У второго слагаемого нулевое начальное значение, поскольку интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

Алгоритм решения задачи

1. Решить соответствующую ЛОС и собрать фундаментальную матрицу X по столбцам. Проверить $X' = AX$ и $\det X \neq 0$.
2. Решить алгебраическую систему $Xc' = f$. Обратную матрицу не обязательно выписывать полностью: иногда проще исключить неизвестные или использовать правило Крамера.
3. Проинтегрировать найденные компоненты c', затем собрать исходный вектор $u = Xc$.
4. Учесть начальные условия, если они заданы, и проверить результат в исходной системе.

Вычислить только c_1, c_2 недостаточно: это коэффициенты в движущемся базисе, а не искомые компоненты состояния. Финальная сборка $u = Xc$ является обязательным последним шагом.

Разобранный пример

Решим

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = 0.$$

Для однородной системы подходит матрица вращения

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Она нормирована в нуле. Тогда

$$c' = X^{-1} f = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix},$$

где $c(0) = 0$ следует из начальных данных. Собираем:

$$u(t) = X(t)c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Проверка: $u_1' = \cos t = -u_2 + 1$, $u_2' = \sin t = u_1$, а $u(0) = 0$. Если нужна вся совокупность решений, добавим $X(t)C$:

$$\begin{cases} u_1 = C_1 \cos t - C_2 \sin t + \sin t, \\ u_2 = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 1 - \cos t. \end{cases}$$

Есть и другое частное решение, $\tilde{u}_p = (0, 1)^\mathsf{T}$. Оно тоже подходит: $A\tilde{u}_p + f = 0$. Его отличие от найденного частного решения есть однородное решение. Следовательно, разные корректные частные решения приводят к одному общему семейству после переобозначения постоянных.

Ответ у доски

Начать с двух вычислений: сумма частного и однородного решения удовлетворяет ЛНС, разность произвольного и частного решений удовлетворяет ЛОС. Затем ввести $u = Xc(t)$, полностью продифференцировать произведение, сократить AXc и получить $Xc' = f$. Записать интегральную формулу и пояснить роль начального вектора. Отдельно подчеркнуть, что матрица X берётся от однородной системы.

Проверка себя

1. Если u_p и $\tilde{u}_p$ есть частные решения одной ЛНС, чему удовлетворяет $u_p - \tilde{u}_p$? **Ответ:** соответствующей ЛОС.
2. Решите $u_1' = u_1 + e^t$, $u_2' = -u_2$, $u(0) = 0$. **Ответ:** $u = (te^t, 0)^\mathsf{T}$.
3. Зависит ли общее семейство от нижнего предела интеграла? **Ответ:** нет; смена фиксированного нижнего предела добавляет постоянный вектор внутри скобок, который включается в C.
4. Можно ли использовать матрицу из двух зависимых решений ЛОС? **Ответ:** нет; она вырождена и не позволяет однозначно решить $Xc' = f$ или представить произвольное состояние.

Частые ошибки

Забывать $X'c$ при дифференцировании; путать $X^{-1}f$ и fX^{-1}; искать фундаментальную матрицу из решений ЛНС; считать сумму двух неоднородных решений решением той же задачи; интегрировать c' и забывать вернуться к u; не подставлять начальные данные после сборки.

БИЛЕТ 17

Линейное уравнение высшего порядка: система, ФСР и вронскиан

Источники: Лекции: PDF 71-76; основной сборник: PDF 74-79; старый вопросник: PDF 33-36

Объём ответа: Доказать эквивалентность перехода, сохранение зависимости, теорему об общем решении и скалярную формулу Лиувилля-Остроградского.

Доработка по фотографиям: вопрос 15

IMG_1983–IMG_1987; главы 17.

Что требуется. Переход, сохранение зависимости, общее решение, скалярный Вронскиан и формула Лиувилля.

Для нормированного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f$ матрица сопровождающей системы имеет единицы над диагональю и последнюю строку $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$. Её след равен $-a_{n-1}$, поэтому

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Если старший коэффициент $a_n \neq 1$, сначала делим все коэффициенты и f на a_n; в экспоненте оказывается $-\int a_{n-1}/a_n$.

Отображение $y \mapsto (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$ сохраняет зависимости: тождественную скалярную комбинацию дифференцируем, а из векторной комбинации берём первую координату. Специальная альтернатива для Вронскиана относится к полному набору из n решений уравнения порядка n. Для меньшего числа функций нельзя без оговорки использовать укороченный определитель как полный Вронскиан системы.

Понять смысл и зафиксировать область

Линейное уравнение порядка n можно рассматривать как систему первого порядка для состояния, состоящего из функции и её производных. При таком переходе не теряются ни решения, ни начальные данные, ни линейная зависимость. Поэтому почти вся теория линейных систем переносится на скалярное уравнение. Однако вронскиан скалярных функций выглядит иначе: его строки составлены из последовательных производных.

Рассмотрим нормированное уравнение

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

где все a_j и f непрерывны на интервале I. При $f \equiv 0$ это ЛОУ, при $f \not\equiv 0$ это ЛНУ. Если дано уравнение со старшим коэффициентом $b_n(x)$, сначала надо выбрать интервал, на котором $b_n \neq 0$, и разделить на него. Вся последующая теория относится к полученным нормированным коэффициентам.

Переход к системе и его обратимость

Полагаем $t = x$ и

$$u = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^{\mathsf{T}}.$$

Тогда

$$u' = A(t)u + g(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Для $n = 1$ это просто $u' = -a_0 u + f$. В общем случае первые $n - 1$ строк кодируют определение производных, последняя строка совпадает с исходным уравнением.

Если y решает скалярное уравнение, его вектор производных удовлетворяет системе. Обратно, если u решает систему, то первые строки дают $u_2 = u_1'$, $u_3 = u_1''$, последовательно $u_j = u_1^{(j-1)}$. Последняя строка показывает, что $y = u_1$ имеет непрерывную n-ю производную и решает исходное уравнение. Так установлено взаимно однозначное соответствие решений. Начальные данные $y^{(j)}(x_0) = \alpha_j$ переходят в $u(t_0) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})^{\mathsf{T}}$.

По глобальной линейной теореме каждая задача Коши имеет единственное решение на всём I. Здесь это верно даже для переменных непрерывных коэффициентов; их производные не требуются.

Сохранение линейной зависимости: доказательство

Пусть $y_1, \dots, y_k \in C^{n-1}(I)$, и каждому y_j сопоставлен столбец

$$u^j = (y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})^{\mathsf{T}}.$$

Тогда $y_1, \dots, y_k$ зависимы на I тогда и только тогда, когда $u^1, \dots, u^k$ зависимы на I.

Действительно, если $\sum_j c_j y_j \equiv 0$ с постоянными коэффициентами, дифференцируем это тождество $r = 1, \dots, n-1$ раз. Получаем $\sum_j c_j y_j^{(r)} \equiv 0$. Собирая все эти равенства в один вектор, имеем $\sum_j c_j u^j \equiv 0$ с тем же ненулевым набором коэффициентов. Обратно, первая координата векторного тождества $\sum_j c_j u^j \equiv 0$ есть $\sum_j c_j y_j \equiv 0$. Это уже требуемая зависимость скалярных функций.

Для данного утверждения само дифференциальное уравнение не нужно: достаточно указанной гладкости. Принадлежность одному ЛОУ понадобится для усиленных выводов о вронскиане и полноте ФСР.

ФСР и теорема об общем решении

ФСР линейного однородного уравнения порядка n называется набор из n его линейно независимых решений на I. Такие наборы существуют: берём ФСР сопутствующей системы и первые координаты её столбцов. Обратимость перехода и сохранение зависимости дают нужные n независимых скалярных решений.

Теорема. Если $y_1, \dots, y_n$ образуют ФСР уравнения $L[y] = 0$, то все его решения и только они имеют вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \qquad C_j \in \mathbb{R},$$

причём коэффициенты каждого решения определены однозначно.

Доказательство. Линейность L сразу даёт $L[\sum_j C_j y_j] = \sum_j C_j L[y_j] = 0$. Для обратного включения возьмём произвольное решение y и его вектор производных u. Векторы производных $u^1, \dots, u^n$ выбранной ФСР решают сопутствующую ЛОС и независимы, следовательно, образуют её ФСР. По теореме об общем решении системы $u = \sum_j C_j u^j$ с единственными константами. Первая координата даёт $y = \sum_j C_j y_j$. Единственность также следует прямо из независимости скалярной ФСР. Доказано.

Практически постоянные определяют по начальным данным: нужно решить систему из n линейных алгебраических уравнений, полученных подстановкой x_0 в $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Её определитель и есть следующий объект.

Скалярный вронскиан и границы его применения

Для k функций $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(I)$ определим

$$W[y_1, \dots, y_k](x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ y_1' & \cdots & y_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Зависимость функций влечёт $W \equiv 0$: дифференцируем тождество зависимости до порядка $k-1$ и получаем одну нетривиальную линейную связь между столбцами. Поэтому $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке достаточно для независимости.

Обратное для произвольных функций неверно. Например, $y_1 = x^2$, $y_2 = x|x|$ принадлежат $C^1(\mathbb{R})$, их вронскиан равен нулю всюду, но они независимы: на положительной полуоси потребовалось бы $c_1 + c_2 = 0$, а на отрицательной $c_1 - c_2 = 0$. Вместе эти равенства дают только нулевые коэффициенты.

Усиление для ЛОУ. Если взяты ровно n решений одного нормированного ЛОУ порядка n с непрерывными коэффициентами на I, то $W(x_0) = 0$ в одной точке равносильно зависимости этих решений на всём I. Их столбцы производных решают одну n-мерную ЛОС; её системный вронскиан совпадает с данным скалярным. Поэтому утверждение доказано леммой билета 13.

Ограничение «ровно n» нельзя вычеркнуть. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ являются независимыми решениями $y''' = 0$, но их вронскиан размера 2×2 равен x^2 и обращается в нуль при 0. Они не образуют полный набор из трёх функций. Именно это различие явно подчёркнуто в лекции на PDF-странице 75; чрезмерно широкую формулировку из сборника использовать не следует.

Формула Лиувилля-Остроградского и доказательство

Пусть $y_1, \dots, y_n$ есть n решений $L[y] = 0$, $x_0 \in I$. Тогда

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x), \qquad W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\,ds\right).$$

Минус связан с тем, что последняя диагональная компонента сопутствующей матрицы равна $-a_{n-1}$; остальные диагональные компоненты равны нулю. Применение системной формулы уже даёт доказательство.

Полезно также прямое доказательство, полностью объясняющее знак. Дифференцируем определитель по строкам. При дифференцировании любой строки, кроме последней, возникает строка, уже присутствующая ниже; такой определитель равен нулю. Остаётся определитель с последней строкой $(y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$. По уравнению эта строка равна сумме строк с коэффициентами $-a_0, \dots, -a_{n-1}$. В силу линейности определителя все слагаемые с повторяющимися строками исчезают. Остаётся только $-a_{n-1}W$. Для $n = 1$ то же равенство непосредственно совпадает с самим уравнением. Применяем интегрирующий множитель $\exp(\int_{x_0}^{x} a_{n-1})$ и получаем формулу, не деля на W.

Если исходное уравнение записано как $b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots = 0$, в экспоненте стоит отношение $-\frac{b_{n-1}}{b_n}$, а не просто $-b_{n-1}$.

Разобранный пример

Для $y''' - y' = 0$ проверим функции $1, e^x, e^{-x}$. Подстановка каждой даёт нуль. Их вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, это ФСР, и $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. При $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ получаем

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_2 - C_3 = 1, \quad C_2 + C_3 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$ и $y = \sinh x$. Формула Лиувилля подтверждает постоянство W: коэффициент при y'' равен нулю.

Ответ у доски

Разделить ответ на четыре части: переход к системе в обе стороны; сохранение зависимости посредством дифференцирования тождества; общий вид решения через ФСР; вронскиан и формула Лиувилля. В каждом использовании критерия нулевого вронскиана сказать «n решений уравнения порядка n». Минус в экспоненте объяснить последней строкой сопутствующей матрицы или прямым дифференцированием определителя.

Проверка себя

1. Для $y'' + 2xy' + y = 0$ известно $W(0) = 3$. Найдите W. **Ответ:** $3e^{-x^2}$.

2. У двух решений $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ одинаковые значения в x_0. Совпадают ли решения? **Ответ:** не обязательно; нужны также одинаковые первые производные.
3. Может ли нетривиальное решение ЛОУ порядка n иметь в одной точке нулевые $y, y', \dots, y^{(n-1)}$? **Ответ:** нет, по единственности оно было бы нулевым на всём I.
4. Верно ли, что любые две функции из ФСР уравнения третьего порядка имеют ненулевой вронскиан 2×2 всюду? **Ответ:** нет; в ФСР $1, x, x^2$ можно взять x, x^2, чей вронскиан равен x^2.

Частые ошибки

Пропускать обратный переход от системы к функции; использовать переменные коэффициенты в тождестве линейной зависимости; забывать старший коэффициент при нормировке; писать плюс в скалярной формуле Лиувилля; переносить критерий для n решений на произвольное меньшее число функций; считать совпадение только значений достаточным для единственности уравнения высшего порядка.

БИЛЕТ 18

Построение ЛОУ по ФСР. Вариация постоянных для ЛНУ

Источники: Лекции: PDF 76-78; основной сборник: PDF 80-85; старый вопросник: PDF 37

Объём ответа: Доказать построение уравнения по заданной ФСР; вывести систему вариации постоянных. Понижение порядка является дополнением.

Доработка по фотографиям: вопрос 16

IMG_1988–IMG_1989; главы 18.

Что требуется. Вывести систему для производных коэффициентов и получить общее решение.

В тетради система записана без переходов. Для $n = 2$ положим $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ и наложим $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$. Тогда $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Ещё одно дифференцирование и подстановка в $y'' + py' + qy = f$ дают второе уравнение $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$.

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1 f}{W}, \quad W = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Для порядка n первые $n - 1$ строк имеют правую часть нуль, последняя — нормированную f. Матрица этой системы является полной матрицей Вронского, поэтому обратима. После интегрирования получаем n произвольных постоянных.

В пособии глава 18 также содержит восстановление уравнения по ФСР и понижение порядка. Эти дополнительные части на снимках данного вопроса не заявлены; сам метод вариации остаётся обязательной частью рукописного №16.

Понять смысл

Обычно по уравнению ищут решения. Здесь сначала решается обратная задача: даны n функций, и нужно построить уравнение порядка n, для которого они составят ФСР. Простая независимость функций недостаточна: для уравнения с непрерывными нормированными коэффициентами их вронскиан должен быть ненулевым в каждой точке выбранного интервала.

Вторая часть билета использует уже известную ФСР, чтобы решить неоднородное уравнение. Вместо постоянных коэффициентов в общем однородном решении вводят функции. Возникающие дополнительные условия не являются произвольным трюком: это координатная запись матричного уравнения $Xc' = g$ из предыдущего билета.

Теорема о построении уравнения

Теорема. Пусть $y_1, \dots, y_n \in C^n(I)$, где I есть интервал, и

$$W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0 \qquad \text{для каждого } x \in I.$$

Тогда существует единственное нормированное линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами на I, для которого данные функции образуют ФСР. Его можно записать определителем

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Все функции в одной строке вычисляются при одном и том же x.

Уникальность относится именно к нормированной форме. Если умножить всё уравнение на любую нигде не нулевую непрерывную функцию, множество решений не изменится, но буквальные коэффициенты будут другими.

Полное доказательство

Разложим определитель по последнему столбцу. Коэффициент при $y^{(n)}$ равен $W(x)$: его алгебраическое дополнение имеет положительный знак $(-1)^{2n+2} = 1$. Получаем

$$W(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_0(x)y = 0.$$

Коэффициенты b_j являются определителями из непрерывных производных данных функций до порядка n, поэтому непрерывны. По условию W нигде не равен нулю, значит, можно разделить на W. Полученные $a_j = \frac{b_j}{W}$ непрерывны на I.

При подстановке $y = y_k$ последний столбец совпадает с k-м; определитель равен нулю. Следовательно, каждая из n функций является решением построенного уравнения. Ненулевой вронскиан обеспечивает их независимость. Итак, они действительно составляют ФСР, а по теореме об общем решении все решения имеют вид $\sum_j C_j y_j$.

Осталось доказать уникальность нормированных коэффициентов. Для каждого x они должны удовлетворять n равенствам

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r(x) y_j^{(r)}(x) = -y_j^{(n)}(x), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Матрица этой алгебраической системы есть транспонированная матрица Вронского, поэтому её определитель равен $W(x) \neq 0$. Значит, набор $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ единственен в каждой точке. Это завершает все части доказательства.

Пример обратной задачи и роль интервала

Построим уравнение с ФСР $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ на $I = (0, \infty)$. Имеем $W = x^2 \neq 0$. Определитель даёт

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

После нормировки

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0, \qquad x > 0.$$

Подстановка x и x^2 подтверждает результат. Формула Лиувилля тоже согласуется с ним: $-a_1 = \frac{2}{x}$, поэтому W пропорционален x^2.

На всей $\mathbb{R}$ эти функции независимы, но их вронскиан обращается в нуль. Поэтому они не могут быть ФСР нормированного уравнения второго порядка с непрерывными на всей прямой коэффициентами. Ненормированная запись $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ формально существует и при $x = 0$, однако её старший коэффициент там исчезает. Это не противоречит теореме и не позволяет незаметно расширить интервал регулярной задачи.

Вариация постоянных: постановка и вывод

Пусть $a_0, \dots, a_{n-1}, f \in C(I)$, а $y_1, \dots, y_n$ есть ФСР соответствующего ЛОУ. Ищем решение ЛНУ в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x).$$

Для $n > 1$ наложим условия

$$\sum_j c_j' y_j = 0, \quad \sum_j c_j' y_j' = 0, \quad \dots, \quad \sum_j c_j' y_j^{(n-2)} = 0.$$

Первое позволяет записать $y' = \sum_j c_j y_j'$ без лишнего слагаемого. Второе затем даёт $y'' = \sum_j c_j y_j''$. Продолжая, получаем

$$y^{(r)} = \sum_j c_j y_j^{(r)}, \quad 0 \le r \le n-1, \qquad y^{(n)} = \sum_j c_j y_j^{(n)} + \sum_j c_j' y_j^{(n-1)}.$$

При подстановке в ЛНУ выражения с c_j сокращаются, поскольку $L[y_j] = 0$. Остаётся последнее необходимое условие $\sum_j c_j' y_j^{(n-1)} = f$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы равен ненулевому вронскиану, поэтому система однозначно определяет непрерывные c_j'. Их интегралы определяют c_j с n произвольными постоянными. Для одного частного решения можно выбрать любые удобные первообразные; общее решение получается прибавлением общего однородного.

При $n = 1$ предварительных нулевых условий нет: сразу получается $c_1' y_1 = f$. Если исходное уравнение не нормировано, последняя правая часть равна $\frac{f}{b_n}$. Забытый старший коэффициент меняет ответ.

Почему искусственные на вид нулевые условия не теряют решения? В сопутствующей системе столбцы X являются векторами производных y_j. Равенство $Xc' = g$, где $g = (0, \dots, 0, f)^{\mathsf{T}}$, совпадает с выписанной системой. А матричный метод, как доказано в билете 16, представляет каждое решение. Значит, это согласованный способ выбрать меняющиеся координаты состояния.

Разобранное неоднородное уравнение

Решим $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ на $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Для однородного уравнения ФСР есть $\cos x, \sin x$, вронскиан равен единице. Вариация даёт

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Умножая на обратную матрицу вращения, находим $c_1' = -\tan x$, $c_2' = 1$. На выбранном интервале $\cos x > 0$, поэтому можно взять

$$c_1 = \ln(\cos x), \qquad c_2 = x.$$

Получаем

$$y_p = \cos x \ln(\cos x) + x \sin x, \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p.$$

Проверим частное решение:

$$y_p' = -\sin x \ln(\cos x) + x \cos x,$$

$$y_p'' = -\cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x - x \sin x.$$

После сложения с y_p остаётся $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$. Проверка одновременно выявляет, почему границы интервала нельзя включить: исходная правая часть там не определена.

Дополнение: понижение порядка по известному решению

Если известно ненулевое на выбранном подынтервале решение y_1 ЛОУ второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, положим $y = y_1 z$. После подстановки слагаемые с z исчезнут, поскольку $L[y_1] = 0$:

$$y_1 z'' + (2y_1' + p y_1) z' = 0.$$

Обозначение $v = z'$ снижает порядок до первого. Отсюда

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

даёт второе независимое решение при согласованном выборе первообразных. Деление на y_1 законно лишь там, где $y_1 \neq 0$. Этот дополнительный метод не заменяет обязательные доказательства билета.

Ответ у доски

Для обратной задачи назвать C^n-гладкость и ненулевой вронскиан на всём интервале, записать расширенный определитель, разложить по последнему столбцу и проверить решения совпадающими столбцами. Уникальность объяснить системой для коэффициентов. Для вариации выписать $n-1$ нулевых условий, последнее равенство с f и доказать их совместимость ненулевым определителем.

Проверка себя

1. Постройте нормированное ЛОУ с ФСР $1, e^{2x}$. **Ответ:** $y'' - 2y' = 0$.
2. Найдите частное решение $y'' = x$ вариацией по ФСР $1, x$. **Ответ:** $c_1' + xc_2' = 0$, $c_2' = x$, откуда $c_1 = -\frac{x^3}{3}$, $c_2 = \frac{x^2}{2}$ и $y_p = \frac{x^3}{6}$.
3. Для $2y'' + 2y = \cos x$ что стоит справа в последнем условии вариации? **Ответ:** $\frac{\cos x}{2}$ после нормировки.
4. Почему x, x^2 нельзя объявить ФСР регулярного ЛОУ второго порядка на всей прямой? **Ответ:** $W = x^2$ имеет нуль; нормированные восстановленные коэффициенты имеют особенность при 0.

Частые ошибки

Требовать только независимость вместо ненулевого вронскиана на всём интервале; забывать деление определителя на старший коэффициент; путать условия на c_j с условиями на c_j'; вводить лишь последнее уравнение без нулевых условий; терять интервал при логарифмировании или делении; выдавать найденные c_j за само решение.

БИЛЕТ 19

Характеристический многочлен. Некратные корни

Источники: Лекции: PDF 79-84; основной сборник: PDF 86-88; старый вопросник: PDF 39-40

Объём ответа: Определить характеристический многочлен; доказать построение ФСР и общего решения через экспоненты, включая независимость по Вандермонду.

Доработка по фотографиям: вопрос 17

IMG_1990–IMG_1992; главы 19.

Что требуется. Определение многочлена; проверка экспонент; независимость и полнота.

Незавершённую проверку на IMG_1992 закрываем вычислением:

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0.$$

Это определитель Вандермонда после вынесения экспонент из столбцов. Каждая $e^{\lambda_j x}$ решает ЛОУ, поскольку $L(D)e^{\lambda_j x} = L(\lambda_j)e^{\lambda_j x} = 0$. Решений ровно n, значит это ФСР и их постоянные комбинации дают всё пространство решений.

Для вещественных коэффициентов комплексную пару $a \pm bi$, $b \neq 0$, заменяем вещественными функциями $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. У уравнения порядка n должно остаться n вещественных произвольных постоянных, а не по одной на комплексную пару.

Понять смысл

У экспоненты $e^{\lambda x}$ каждая производная отличается от самой функции лишь постоянным множителем: $D^k e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Поэтому в линейном уравнении с постоянными коэффициентами её подстановка превращает дифференцирование в алгебраическое вычисление многочлена. Корни этого многочлена указывают естественные режимы решения: рост, затухание или колебания.

Однако найти несколько подходящих экспонент недостаточно для общего решения. Надо доказать, что их число равно порядку уравнения и что они независимы. Именно второй пункт требует условия различных корней и определителя Вандермонда.

Определения и точная теорема

Рассмотрим

$$L(D)y := a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_n \neq 0,$$

где a_j являются постоянными, $D = \frac{d}{dx}$. **Характеристический многочлен** этого уравнения есть

$$L(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Равенство $L(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением. Многочлен и уравнение не одно и то же: первый является функцией аргумента λ, второе задаёт условие на его корни.

Теорема. Пусть L имеет n попарно различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Тогда функции

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

образуют комплексную ФСР на $\mathbb{R}$ и на любом непустом открытом интервале. Все комплексные решения имеют единственное представление

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}, \qquad C_j \in \mathbb{C}.$$

Если коэффициенты и корни вещественны, для всех вещественных решений достаточно взять $C_j \in \mathbb{R}$. При комплексных корнях вещественного многочлена ниже будет указан вещественный базис.

Доказательство: сначала решения, затем независимость

Для любого постоянного λ имеем

$$L(D)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = L(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Поскольку экспонента нигде не обращается в нуль, она решает уравнение тогда и только тогда, когда $L(\lambda) = 0$. Следовательно, каждая из n предложенных функций действительно является решением.

Вычислим их вронскиан:

$$W(x) = \det\left(\lambda_j^{i-1} e^{\lambda_j x}\right)_{i,j=1}^{n} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Определитель справа есть определитель Вандермонда:

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Все множители ненулевые по условию различных корней. Комплексная экспонента тоже нигде не равна нулю. Поэтому $W(x) \neq 0$, а предложенные решения независимы. Их ровно n, следовательно, они образуют ФСР. По общей теореме линейного уравнения порядка n их комбинации дают все решения, причём единственным образом.

Почему формула Вандермонда имеет такой вид. Если она не вспоминается, её можно восстановить индукцией. Рассмотрим определитель как многочлен по последнему аргументу λ_n. Его степень не превосходит $n-1$, а при $\lambda_n = \lambda_i$, $i < n$, два столбца совпадают. Значит, он делится на $\prod_{i<n}(\lambda_n - \lambda_i)$. Коэффициент при λ_n^{n-1} равен определителю Вандермонда от первых $n-1$ аргументов: он получается разложением по последнему столбцу и нижнему элементу. Поэтому

$$V_n = V_{n-1} \prod_{i<n} (\lambda_n - \lambda_i), \qquad V_1 = 1.$$

Повторение даёт заявленное произведение. Это также фиксирует знак: при столбцах в порядке $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ берётся $\lambda_j - \lambda_i$ для $i < j$.

Комплексные корни и вещественные решения

Если коэффициенты вещественны, невещественные корни идут сопряжёнными парами $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$. По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Вместо пары сопряжённых экспонент удобно взять вещественные решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Они являются вещественной и мнимой частями комплексного решения; вещественный оператор действует на эти части отдельно. Переход между двумя базисами задаётся постоянной невырожденной комплексной матрицей, поэтому независимость сохраняется. Для вещественного общего решения коэффициенты перед синусом и косинусом произвольны и вещественны.

Нулевой корень даёт $e^{0x} = 1$. При простом нулевом корне нельзя автоматически добавлять x: для этого нужен корень кратности хотя бы два. Равенство двух корней также не даёт две разные экспоненты; в этом случае нужен билет 20.

Разобранный пример с начальными данными

Решим

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Характеристический многочлен раскладывается группировкой:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$

Корни $2, i, -i$ различны. Вещественная ФСР есть $e^{2x}, \cos x, \sin x$, поэтому

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Дифференцируем и подставляем $x = 0$:

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 2C_1 + C_3 = 0, \qquad 4C_1 - C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{5}$, $C_2 = \frac{4}{5}$, $C_3 = -\frac{2}{5}$, и

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{2x} + \frac{4}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x.$$

Все три начальных условия проверяются непосредственно. Для проверки уравнения не нужно заново собирать длинную производную: $L(2) = 0$ подтверждает экспоненциальное слагаемое, а множитель $D^2 + 1$ уничтожает оба тригонометрических слагаемых. Коммутативность операторов с постоянными коэффициентами делает такую проверку корректной.

Практический алгоритм и контроль

Сначала проверить линейность, однородность и постоянство коэффициентов. Затем составить $L(\lambda)$, найти корни с кратностями, записать по одному независимому решению на каждый простой корень и преобразовать комплексные пары в вещественную форму. Число независимых постоянных должно равняться порядку. Начальные условия применяются только после составления полного общего решения.

Есть полезная проверка вронскиана: по Виету $\sum_j \lambda_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Найденная формула $W = Ve^{(\sum_j \lambda_j)x}$ согласуется с формулой Лиувилля, где в экспоненте стоит $-\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\,dx$. Несогласие обычно указывает на ошибку в знаке характеристического многочлена.

Ответ у доски

Записать оператор и характеристический многочлен, указать постоянство коэффициентов и условие $a_n \neq 0$. Сформулировать теорему для n различных корней. Доказать $L(D)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$. Затем выписать вронскиан, вынести экспоненты из столбцов и назвать ненулевое произведение Вандермонда. Заключение «это ФСР» связать с общим решением из билета 17. При вещественных коэффициентах объяснить замену сопряжённой пары синусом и косинусом.

Проверка себя

1. Решите $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **Ответ:** $y = e^{2x} - e^{x}$.
2. Найдите вещественную ФСР для $y'' + 4y' + 13y = 0$. **Ответ:** корни $-2 \pm 3i$, ФСР $e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x$.
3. Найдите $W[e^{x}, e^{3x}]$. **Ответ:** $2e^{4x}$.
4. Почему две копии e^{2x} не дают ФСР для $y'' - 4y' + 4y = 0$? **Ответ:** функции совпадают и зависимы; второй независимой функцией будет xe^{2x}, что требует теоремы о кратном корне.

Частые ошибки

Заменять производные степенями λ в уравнении с переменными коэффициентами и ожидать ту же теорию; терять свободный член многочлена; путать корень 0 с отсутствием решения; забывать вторую функцию для комплексной пары; доказывать только подстановку, но не независимость; использовать теорему простых корней при наличии кратностей.

БИЛЕТ 20

Кратные характеристические корни. Формула смещения

Источники: Лекции: PDF 81-82, 84-87; основной сборник: PDF 89-93; старый вопросник: PDF 41-42

Объём ответа: Доказать формулу смещения, принадлежность построенных функций решениям и их линейную независимость. В печатном вопросе сборника слово «некратных» является опиской; содержание посвящено кратным корням.

Доработка по фотографиям: вопрос 18

IMG_1993–IMG_1995; главы 20.

Что требуется. Доказать формулу смещения, построить решения для кратного корня, доказать независимость.

Из $D(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}(D+\lambda)v$ последовательным применением и линейностью получаем

$$L(D)(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}L(D+\lambda)v.$$

Если $L(z) = (z-\lambda)^k M(z)$, $M(\lambda) \neq 0$, то $L(D+\lambda) = M(D+\lambda)D^k$. Для $v = x^j$, $0 \leq j < k$, производная $D^k v = 0$, поэтому $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ являются решениями.

Независимость разных экспоненциальных блоков доказывается так: разделить предполагаемое тождество на одну экспоненту и продифференцировать столько раз, чтобы уничтожить её полиномиальный блок. На остальных блоках действует степень $D+\alpha$ с $\alpha \neq 0$; этот оператор обратим на многочленах ограниченной степени. Индукция по числу различных корней даёт нулевые полиномы во всех блоках. Общее число функций равно сумме кратностей, то есть порядку уравнения.

Понять смысл

Если у уравнения второго порядка характеристический корень λ двойной, одна функция $e^{\lambda x}$ не может описать все решения с двумя независимыми начальными данными. Повторить её два раза бесполезно: одинаковые функции зависимы. Второе решение возникает после умножения на x. В общем случае корень кратности k даёт цепочку

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Причина алгебраическая: множитель $(D-\lambda)^k$ после вынесения экспоненты превращается в обычную k-ю производную. Она уничтожает любой многочлен степени меньше k. Но, как и в предыдущем билете, проверка уравнения ещё не доказывает полноту семейства. Отдельно нужна независимость цепочек, соответствующих разным корням.

Операторы и формула смещения

Пусть

$$L(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0,$$

где все коэффициенты постоянны, а $g \in C^n(I)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$L(D)(e^{\lambda x} g(x)) = e^{\lambda x} L(D+\lambda) g(x).$$

Здесь $L(D+\lambda)$ означает буквальную подстановку оператора $D+\lambda$ вместо аргумента многочлена. Например, при $L(D) = D^2 - 3D + 2$ получаем

$$L(D+\lambda) = D^2 + (2\lambda - 3)D + (\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Сдвигается аргумент *всего* многочлена, а не только его свободный член.

Доказательство формулы смещения. По правилу произведения

$$D(e^{\lambda x} g) = e^{\lambda x}(g' + \lambda g) = e^{\lambda x}(D+\lambda) g.$$

Докажем индукцией $D^k(e^{\lambda x} g) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k g$. При $k = 0$ это тождество, при $k = 1$ уже доказано. Если равенство верно для $k < n$, ещё раз дифференцируем и применяем равенство первого порядка к функции $(D+\lambda)^k g$:

$$D^{k+1}(e^{\lambda x} g) = D(e^{\lambda x}(D+\lambda)^k g) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^{k+1} g.$$

Суммируя эти равенства с коэффициентами a_k, получаем формулу для L. Указанной гладкости достаточно для всех выполненных дифференцирований.

Многочлены от D с постоянными коэффициентами коммутируют: $P(D)Q(D) = Q(D)P(D)$ на достаточно гладких функциях. Это следует из $D^i D^j = D^{i+j}$. Для операторов с переменными коэффициентами аналогичная перестановка в общем случае неверна: например, $D(xg) = xDg + g$.

Точная теорема о кратных корнях

Пусть $L(D)y = 0$ есть уравнение порядка n с постоянными вещественными или комплексными коэффициентами и $a_n \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ есть все различные комплексные корни L, а их кратности равны $k_1, \dots, k_m$, так что

$$L(z) = a_n \prod_{i=1}^{m} (z - \lambda_i)^{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Тогда функции

$$x^r e^{\lambda_i x}, \qquad i = 1, \dots, m, \quad r = 0, \dots, k_i - 1,$$

образуют комплексную ФСР. Все решения имеют вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i x} P_i(x), \qquad P_i(x) = \sum_{r=0}^{k_i - 1} C_{i,r} x^r.$$

Многочлен P_i имеет степень *не выше* $k_i - 1$ и может быть нулевым. Утверждение не требует, чтобы в каждом конкретном решении все старшие коэффициенты были ненулевыми.

Доказательство: каждая функция является решением

Зафиксируем корень λ_i кратности k_i. Тогда

$$L(z) = (z - \lambda_i)^{k_i} M_i(z), \qquad M_i(\lambda_i) \neq 0.$$

При сдвиге

$$L(D + \lambda_i) = D^{k_i} M_i(D + \lambda_i) = M_i(D + \lambda_i) D^{k_i}.$$

Для $0 \leq r < k_i$ формула смещения даёт

$$L(D)(e^{\lambda_i x} x^r) = e^{\lambda_i x} M_i(D + \lambda_i) D^{k_i} x^r = 0,$$

так как k_i-я производная многочлена степени $r < k_i$ равна нулю. Всего построено $\sum_i k_i = n$ решений.

Почему не добавляют $x^{k_i} e^{\lambda_i x}$? Для него $D^{k_i} x^{k_i} = k_i!$, поэтому тот же расчёт даёт

$$L(D)(e^{\lambda_i x} x^{k_i}) = e^{\lambda_i x} k_i! M_i(\lambda_i) \neq 0.$$

Так видна точная граница цепочки, а не только удобный выбор нескольких решений.

Доказательство независимости: все логические шаги

Докажем более общую лемму: если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны, а P_i являются многочленами, то тождество

$$\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i x} P_i(x) \equiv 0$$

на непустом открытом интервале возможно лишь при $P_i \equiv 0$ для всех i.

При $m = 1$ делим на нигде не нулевую экспоненту и получаем $P_1 = 0$ на интервале. Многочлен, равный нулю на интервале, тождественно нулевой.

Предположим, что лемма верна для $m - 1$ различных показателей. Разделим тождество с m слагаемыми на $e^{\lambda_m x}$:

$$\sum_{i<m} e^{\mu_i x} P_i(x) + P_m(x) = 0, \qquad \mu_i = \lambda_i - \lambda_m \neq 0.$$

Выберем натуральное r больше степени P_m; если $P_m = 0$, можно взять любое $r \geq 1$. Продифференцируем r раз. Последний многочлен исчезает, а формула смещения даёт

$$\sum_{i<m} e^{\mu_i x} Q_i(x) = 0, \qquad Q_i = (D + \mu_i)^r P_i.$$

Показатели μ_i попарно различны, поэтому по предположению индукции все Q_i нулевые.

Теперь принципиальный шаг: при $\mu \neq 0$ оператор $D + \mu$ не может превратить ненулевой многочлен в нулевой. Если старший член P равен ax^d, то старший член $P' + \mu P$ равен $\mu a x^d$, поскольку производная имеет меньшую степень. После r применений старший коэффициент равен $\mu^r a \neq 0$. Следовательно, $Q_i = 0$ влечёт $P_i = 0$ для каждого $i < m$. Возвращаясь в исходное тождество, получаем $e^{\lambda_m x} P_m = 0$, значит, $P_m = 0$. Индукция завершена.

Применим лемму к предполагаемой линейной связи между $x^r e^{\lambda_i x}$. Сгруппировав коэффициенты одного показателя в P_i, получим, что каждый P_i нулевой. Тогда все его

коэффициенты $C_{i,r}$ равны нулю. Независимость доказана. Построены ровно n независимых решений; общая теорема ЛОУ завершает доказательство ФСР и общего решения.

Этот аргумент работает и для комплексных корней. Рассуждение о том, какая экспонента «быстрее растёт», здесь хуже: у различных чисто мнимых корней нет порядка по скорости роста, а дифференцирование и старший коэффициент работают без такого ограничения.

Вещественная форма при комплексных кратных корнях

При вещественных коэффициентах корни $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, имеют одинаковую кратность k. Вместо двух комплексных цепочек выбирают $2k$ вещественных функций

$$x^r e^{\alpha x}\cos \beta x, \qquad x^r e^{\alpha x}\sin \beta x, \qquad r = 0, \dots, k-1.$$

Это вещественные и мнимые части цепочек. Их независимость следует из обратимого перехода от сопряжённых экспонент. Для вещественного корня кратности k берут одну цепочку из k функций, а для сопряжённой пары кратности k каждая берут две цепочки, всего $2k$ функций.

Например, многочлен $(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)$ даёт вещественное общее решение

$$y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Здесь четыре независимые постоянные, как и должно быть для уравнения четвёртого порядка. Многочлен $(\lambda^2+4)^2$ дал бы вместо этого

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

Степень многочлена одна и та же, но кратности отдельных корней и соответствующие цепочки различаются.

Разобранная задача Коши

Решим

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Характеристический многочлен $(\lambda-1)^3$ имеет единственный корень 1 кратности три. Значит,

$$y = e^x P(x), \qquad P = C_1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

Чтобы не допустить ошибок в производных, используем $y' = e^x(P + P')$, $y'' = e^x(P + 2P' + P'')$. Начальные условия дают

$$C_1 = 1, \qquad C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0.$$

Отсюда $C_2 = -1$, $C_3 = \frac{1}{2}$, поэтому

$$y(x) = e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Проверка самого уравнения коротка и содержательна:

$$(D-1)^3(e^x P) = e^x D^3 P = 0.$$

Начальные данные проверяются уже найденными формулами. Обращает внимание множитель $2C_3$ в P'': забытый фактор 2 часто портит ответ даже при верно выбранной ФСР.

Ответ у доски

Построить ответ из трёх доказательств. Первое: правило произведения, затем индукция дают формулу смещения. Второе: разложение $L(z) = (z-\lambda)^k M(z)$ после смещения оставляет D^k, уничтожающее x^r при $r < k$. Третье: сгруппировать предполагаемую зависимость в многочлены, разделить на одну экспоненту, убрать соответствующий многочлен дифференцированием и объяснить сохранение ненулевого старшего коэффициента остальных. Закончить подсчётом числа функций и теоремой об общем решении.

Проверка себя

1. Запишите ФСР для $D^2(D+2)^3 y = 0$. **Ответ:** $1, x, e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}$.
2. Вычислите $(D-3)^2(x^2e^{3x})$. **Ответ:** $2e^{3x}$; функция не решает соответствующее однородное уравнение.
3. Решите $(D^2+1)^2 y = 0$ в вещественной форме. **Ответ:** $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.
4. Почему из $(D+\mu)^r P = 0$ для многочлена P следует $P = 0$ при $\mu \neq 0$, но не при $\mu = 0$? **Ответ:** в первом случае ненулевой старший коэффициент умножается на μ^r; во втором обычная производная уничтожает многочлены степени меньше r.

Частые ошибки

Повторять одинаковую экспоненту вместо цепочки; начинать цепочку с x и терять $e^{\lambda x}$; заканчивать её степенью k вместо $k-1$; путать кратность корня и общее число различных корней; сдвигать только часть оператора; доказывать принадлежность решениям и объявлять независимость очевидной; считать степень P_i обязательно равной $k_i - 1$; забывать отдельную синусную цепочку у кратной комплексной пары.

БИЛЕТ 21

ЛНУ с квазимногочленом в правой части

Источники: конспект лекций, с. 88-92; сборник, с. 94-96

Объём ответа: Полное доказательство формы частного решения и резонансного множителя

Доработка по фотографиям: вопрос 19

IMG_1996–IMG_1998; главы 21.

Что требуется. Определение, суперпозиция, теорема о частном решении с доказательством.

Для $L(D)y = e^{\mu x}P_N(x)$, $P_N \neq 0$, пусть s — кратность μ как корня L; при отсутствии корня $s = 0$. Ищем $y_p = e^{\mu x}x^s Q_N(x)$. После смещения и разложения $L(z) = (z-\mu)^s M(z)$ получаем

$$M(D+\mu)D^s(x^s Q_N) = P_N.$$

Оператор $Q \mapsto D^s(x^s Q)$ диагонален на мономах с ненулевыми коэффициентами $(s+j)!/j!$. Оператор $M(D+\mu)$ треугольен с диагональю $M(\mu) \neq 0$. Оба обратимы, поэтому выбранный Q_N существует и единственен. Сравнение старших коэффициентов даёт $q_N = p_N N!/[M(\mu)(N+s)!] \neq 0$.

Для вещественной тригонометрической правой части берём оба полинома:

$$x^s e^{\alpha x}(A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x).$$

Их отдельные фактические степени могут оказаться меньше N. Не пропускаем младшие степени и не называем найденные коэффициенты произвольными постоянными общего решения.

Понять смысл

Метод неопределённых коэффициентов работает не потому, что удаётся угадать удачную функцию. За ним стоит конечномерная линейная алгебра: дифференцирование сохраняет пространство многочленов ограниченной степени, а умножение на экспоненту заменяет оператор D на $D+\mu$. Поэтому специальная правая часть позволяет искать специальное частное решение, решая конечную систему алгебраических уравнений.

Если показатель экспоненты совпадает с характеристическим корнем, обычная пробная функция пересекается с пространством однородных решений. Возникает резонанс: для получения ненулевой правой части нужно добавить степени x. Число необходимых степеней определяется *кратностью данного корня*, а не порядком всего уравнения и не степенью многочлена справа.

Точная формулировка

Пусть

$$L(D)y = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y, \qquad a_n \neq 0,$$

где все коэффициенты постоянны, $D = \frac{d}{dx}$, а $L(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_0$. *Комплексным квазимногочленом* называется функция $e^{\mu x}P(x)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, P — многочлен. Конечные суммы таких функций также часто называют квазимногочленами; выбранное соглашение нужно проговорить. При вещественных коэффициентах практическая форма имеет вид

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x).$$

Она получается взятием вещественной части комплексного выражения с $\mu = \alpha + i\beta$.

Пусть $P_N \not\equiv 0$ имеет степень N, а s — кратность μ как корня L; если $L(\mu) \neq 0$, полагаем $s = 0$. Тогда уравнение

$$L(D)y = e^{\mu x}P_N(x)$$

имеет частное решение

$$y_p(x) = e^{\mu x}x^s Q_N(x), \qquad \deg Q_N = N.$$

Многочлен Q_N в этом специально выбранном виде определяется однозначно. Это не означает единственности частного решения вообще: к нему можно прибавить любое решение однородного уравнения.

Если y_p — одно частное решение, все решения имеют вид $y = y_h + y_p$, где $L(D)y_h = 0$. Действительно, $L(D)(y - y_p) = 0$; обратно, линейность даёт $L(D)(y_h + y_p) = f$. Для вещественного уравнения выбирают вещественную ФСР и вещественное частное решение.

Доказательство

1. Снять экспоненту. Для любой достаточно гладкой функции v справедливо

$$D(e^{\mu x}v) = e^{\mu x}(D + \mu)v.$$

Последовательное применение этого равенства даёт $D^k e^{\mu x}v = e^{\mu x}(D + \mu)^k v$, а линейная комбинация — формулу смещения

$$L(D)(e^{\mu x}v) = e^{\mu x}L(D + \mu)v.$$

Следовательно, достаточно найти $v = x^s Q_N$ из уравнения $L(D + \mu)v = P_N$.

2. Выделить кратность. Разложим характеристический многочлен:

$$L(\lambda) = (\lambda - \mu)^s M(\lambda), \qquad M(\mu) \neq 0.$$

Тогда

$$L(D + \mu) = D^s M(D + \mu) = M(D + \mu)D^s.$$

Перестановка законна: оба множителя являются многочленами от одного оператора D с постоянными коэффициентами. Для переменных коэффициентов такое рассуждение обычно неверно.

3. Обратить два конечномерных оператора. Обозначим через $\mathcal{P}_N$ пространство многочленов степени не выше N. Отображение

$$Q \longmapsto R = D^s(x^s Q)$$

переводит $\mathcal{P}_N$ в себя и обратимо, поскольку на базисных мономах

$$D^s(x^{s+j}) = \frac{(s+j)!}{j!}x^j, \qquad 0 \le j \le N,$$

все множители ненулевые. Теперь нужно решить $M(D+\mu)R = P_N$. Разложение по степеням D имеет вид

$$M(D+\mu) = M(\mu) + b_1 D + \cdots + b_{n-s}D^{n-s}.$$

В базисе $1, x, \dots, x^N$ матрица этого оператора треугольна: производные понижают степень, а на диагонали стоит ненулевое число $M(\mu)$. Поэтому оператор обратим на $\mathcal{P}_N$.

Можно обойтись без термина «треугольная матрица». Сначала приравниваем старшие коэффициенты, затем коэффициенты при x^{N-1} и далее. На каждом шаге единственный новый коэффициент умножен на $M(\mu) \neq 0$; остальные уже найдены. Получаем единственные R и Q.

4. Проверить именно степень. Если $P_N = p_N x^N + \cdots$, $p_N \neq 0$, и $Q = q_N x^N + \cdots$, то сравнение старших членов даёт

$$M(\mu)\frac{(N+s)!}{N!}q_N = p_N, \qquad q_N = \frac{p_N N!}{M(\mu)(N+s)!} \neq 0.$$

Значит, степень Q равна N, а не только не превышает N. Подстановка обратно через формулу смещения завершает доказательство. Смысл множителя x^s теперь ясен: он компенсирует s дифференцирований, появившихся из-за корня характеристического многочлена.

Как решать задачи

1. Найти $L(\lambda)$ и общее однородное решение. Разложить правую часть в сумму удобных квазимногочленов.
2. Для каждого показателя μ отдельно определить его кратность s. У многочлена без экспоненты $\mu = 0$.
3. Записать полный многочлен степени N с неизвестными коэффициентами, включая младшие степени, даже если справа некоторые из них отсутствуют.
4. Для $e^{\alpha x}(P\cos\beta x + R\sin\beta x)$ при $\beta \neq 0$ брать

   $$x^s e^{\alpha x}\left(A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x\right), \quad N = \max(\deg P, \deg R).$$

   Оба многочлена нужны: дифференцирование смешивает синус и косинус. Здесь степени искомых вещественных многочленов могут оказаться ниже N.
5. Найти коэффициенты, сложить частные решения, прибавить однородное, затем использовать начальные условия. Проверить исходное уравнение, а не только преобразованную систему коэффициентов.

Пример: двукратный резонанс

Решим

$$y'' - 2y' + y = e^x(x+1).$$

Здесь $L(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, $\mu = 1$, $s = 2$, $N = 1$. Поэтому пробуем $y_p = e^x x^2 (Ax + B)$. Быстрее снять экспоненту: при $y = e^x v$ получаем

$$(D-1)^2 (e^x v) = e^x v'', \qquad v'' = x + 1.$$

Для частного решения берём $v = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$; константы интегрирования пока не добавляем, поскольку они войдут в однородную часть. Итак,

$$y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right).$$

Проверка: вторая производная выражения в скобках равна $x + 1$. Если дополнительно $y(0) = y'(0) = 0$, то $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 = 0$, значит $C_2 = 0$.

Для сравнения, у $y'' + y = \cos x$ показатель i — простой корень; частное решение равно $\frac{x}{2} \sin x$. Множитель x приводит к неограниченному росту амплитуды. Это конкретный резонанс, а не общее правило «тригонометрическая правая часть всегда даёт ограниченное решение».

Ответ у доски

Назвать квазимногочлен и кратность s. Сформулировать $y_p = e^{\mu x} x^s Q_N$. Написать формулу смещения и разложение $L(D + \mu) = M(D + \mu) D^s$. Объяснить обратимость $Q \mapsto D^s (x^s Q)$ и треугольность второго оператора. Закончить формулой старшего коэффициента и напомнить $y = y_h + y_p$.

Проверка себя

1. Найдите частное решение $y'' - y = e^{2x}(x + 1)$. *Ответ:* $e^{2x}(\frac{x}{3} - \frac{1}{9})$; после снятия экспоненты действует $D^2 + 4D + 3$.
2. Выберите пробный вид для $y''' - y'' = x^2$. *Ответ:* $x^2 (Ax^2 + Bx + C)$, поскольку 0 — двукратный корень $\lambda^2 (\lambda - 1)$.
3. Найдите частное решение $y'' + 4y = \sin 2x$. *Ответ:* $-\frac{x}{4} \cos 2x$.
4. Для каких вещественных a уравнение $y'' + ay = \cos x$ имеет хотя бы одно периодическое решение? *Ответ:* при $a \neq 1$ подходит $\frac{\cos x}{a-1}$; при $a = 1$ резонансный член $\frac{x \sin x}{2}$ нельзя устранить однородным решением.

Частые ошибки

Не заменять кратность s порядком уравнения. Не терять младшие коэффициенты пробного многочлена. Не добавлять к $x^s Q_N$ лишние произвольные постоянные: выбранный представитель уже однозначен. Не смешивать существование одного периодического решения с ограниченностью всех решений. Формулировка и доказательство выше проверены математически; это рабочее изложение лекционного материала и содержания страниц 94-96 сборника, а не дословная цитата действующего билета.

БИЛЕТ 22

Интегральная формула Коши

Источники: конспект лекций, с. 93-94, 97; сборник, с. 97-99

Объём ответа: Полное построение ядра и доказательство формулы дифференцированием

Доработка по фотографиям: вопрос 20

IMG_1999–IMG_2001; главы 22.

Что требуется. Построить ядро и доказать формулу; незавершённый пример с тангенсом.

Среди файлов нет IMG_2000; IMG_1999 и IMG_2001 непосредственно продолжают одно доказательство. Для нормированного уравнения порядка n ядро $K(x,s)$ решает ЛОУ по x и имеет $K = K_x = \cdots = K_x^{(n-2)} = 0$, $K_x^{(n-1)} = 1$ при $x = s$. Последовательное дифференцирование $y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,s) f(s)\,ds$ до порядка n даёт граничный член $f(x)$ только на последнем шаге. Остаток интеграла уничтожается оператором L.

Дописанный пример тетради: $y'' + 4y = \tan x$. ФСР $\cos 2x, \sin 2x$; ядро

$$K(x,s) = \tfrac{1}{2}\sin 2(x-s), \qquad y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin 2(x-s)\tan s\,ds.$$

x_0 и x должны лежать в одном интервале $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$. Вычислять интеграл для записи решения не требуется. При $n = 1$ единственное условие ядра — $K(s,s) = 1$; нулевого условия нет.

Понять смысл

Метод предыдущего билета использует специальный вид правой части и постоянство коэффициентов. Интегральная формула Коши работает для произвольной непрерывной правой части и непрерывных переменных коэффициентов. Она складывает отклики однородного уравнения на воздействия, приложенные в разные моменты. Слово «отклик» здесь помогает интуиции; доказательство опирается только на обычные производные, ФСР и правило Лейбница.

Особые начальные условия ядра устроены так, что первые $n-1$ дифференцирований интеграла не создают граничного члена, а при n-м появляется ровно $f(x)$. Именно это и требуется для неоднородного уравнения порядка n.

Точная формулировка

Пусть I — интервал, $x_0 \in I$, $a_0, \ldots, a_{n-1}, f \in C(I)$ и

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x).$$

Старший коэффициент нормирован к единице. Если исходно он равен $a_n(x) \neq 0$, сначала всё уравнение делят на a_n, включая правую часть.

Для каждого $\tau \in I$ *функцией Коши* называется решение $K(x,\tau)$ однородного уравнения по переменной x, удовлетворяющее условиям

$$\partial_x^j K(\tau,\tau) = 0 \quad (0 \le j \le n-2), \qquad \partial_x^{n-1} K(\tau,\tau) = 1.$$

При $n = 1$ первого набора условий нет, а последнее означает $K(\tau,\tau) = 1$. Этот крайний случай нельзя подменять условием $K(\tau,\tau) = 0$.

Тогда единственное решение задачи с нулевыми начальными данными

$$y^{(j)}(x_0) = 0, \qquad 0 \le j \le n-1,$$

имеет вид

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Формула верна для x по обе стороны от x_0; интеграл при $x < x_0$ понимается с обычной ориентацией. Для ненулевых начальных данных к y_p прибавляют решение однородной задачи с этими данными.

Построение ядра и необходимая регулярность

Пусть $y_1, \dots, y_n$ — ФСР однородного уравнения и

$$X(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Её определитель нигде не равен нулю на I. Ищем $K(x,\tau) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\tau) y_j(x)$ и решаем

$$X(\tau) c(\tau) = e_n, \qquad c(\tau) = X(\tau)^{-1} e_n,$$

где e_n — последний вектор стандартного базиса. Это одновременно доказывает существование, единственность и возможность вычисления ядра.

Поскольку X непрерывна и обратима, её обратная матрица непрерывна. Все y_j принадлежат $C^n(I)$. Следовательно, $K, \partial_x K, \dots, \partial_x^n K$ совместно непрерывны по (x,τ). На любом компактном подинтервале можно применять правило дифференцирования интеграла с параметром. Производные коэффициентов a_j и правой части f для этого не нужны. Этот момент важен: неверное дифференцирование f искусственно усилило бы условия теоремы.

Доказательство интегральной формулы

Обозначим правую часть формулы через $Y(x)$. При $n \ge 2$ правило Лейбница даёт

$$Y'(x) = K(x,x) f(x) + \int_{x_0}^{x} \partial_x K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{x_0}^{x} \partial_x K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Здесь диагональное значение $K(x,x)$ равно нулю. Прежде чем дифференцировать ещё раз, граничный член уже заменён тождественным нулём. Поэтому не возникает ни f', ни производной функции $K(x,x)$.

Индукцией получаем

$$Y^{(j)}(x) = \int_{x_0}^{x} \partial_x^j K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad 0 \le j \le n-1.$$

На шаге от $j-1$ к $j \le n-1$ граничный член равен $\partial_x^{j-1} K(x,x) f(x) = 0$. Следующее дифференцирование отличается:

$$Y^{(n)}(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} \partial_x^n K(x,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

поскольку $\partial_x^{n-1} K(x,x) = 1$. Для $n = 1$ именно эта формула получается сразу при первом дифференцировании; промежуточный индукционный этап пуст.

Теперь подставляем в $L[Y]$. Коэффициенты $a_j(x)$ не зависят от переменной интегрирования и объединяются под одним интегралом:

$$\begin{aligned} L[Y](x) &= f(x) + \int_{x_0}^{x} \left(\partial_x^n K + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \partial_x^j K \right) f(\tau)\, d\tau \\ &= f(x) + \int_{x_0}^{x} L_x[K(x,\tau)] f(\tau)\, d\tau = f(x). \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю по определению ядра. Кроме того, при $x = x_0$ все интегралы для $Y^{(j)}$, $j < n$, имеют одинаковые пределы и равны нулю. Следовательно, выполнены и уравнение, и все начальные условия. Единственность следует из теоремы для линейной задачи Коши. Доказательство закончено.

Как решать задачи

Для второго порядка особенно удобна готовая формула. Если y_1, y_2 — ФСР, а $W(\tau) = y_1(\tau) y_2'(\tau) - y_1'(\tau) y_2(\tau)$, то

$$K(x,\tau) = \frac{y_1(\tau) y_2(x) - y_2(\tau) y_1(x)}{W(\tau)}.$$

Проверка в точке $x = \tau$ даёт $K = 0$ и $K_x = 1$. Знак числителя важен: перестановка двух слагаемых без изменения знаменателя поменяет f на $-f$.

Для постоянных коэффициентов ядро зависит только от разности $x - \tau$: $K(x,\tau) = k(x-\tau)$, где k решает однородное уравнение с указанными начальными данными в нуле. Для переменных коэффициентов эту зависимость предполагать нельзя. Примеры:

$$\begin{aligned} &y'' + \omega^2 y = f, && K = \frac{\sin \omega(x-\tau)}{\omega}, \quad \omega > 0, \\ &y'' = f, && K = x - \tau, \\ &y' + a(x) y = f, && K = \exp\left(-\int_{\tau}^{x} a(s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Интегральная запись уже является точным решением; отсутствие элементарной первообразной не означает, что задача не решена.

Пример с вычислением интеграла

Рассмотрим

$$y'' + 4y = \tan 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Интервал выбран так, чтобы правая часть была непрерывна и содержался $x_0 = 0$. Из ФСР $\cos 2x, \sin 2x$ получаем $W = 2$ и

$$K(x,\tau) = \frac{1}{2}\sin 2(x-\tau).$$

По формуле Коши

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-\tau)\tan 2\tau\, d\tau.$$

Раскрывая синус разности, используем

$$\int_0^x \cos 2\tau \tan 2\tau\, d\tau = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\int_0^x \sin 2\tau \tan 2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\ln(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Вторая формула следует из $\frac{\sin^2 z}{\cos z} = \sec z - \cos z$. Итог:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \ln(\sec 2x + \tan 2x).$$

На выбранном интервале аргумент логарифма положителен. В произвольном интервале непрерывности удобнее писать модуль. Значения $y_p(0) = y_p'(0) = 0$ проверяются непосредственно; уравнение уже обосновано общим доказательством.

Ответ у доски

Начать с нормированного уравнения и непрерывности коэффициентов. Определить ядро как решение однородной задачи при $x = \tau$. Объяснить его построение через обратимую матрицу Вронского. Дифференцировать интеграл до порядка n, отдельно указав единственный ненулевой граничный член. Сгруппировать интегралы в $L_x K = 0$ и проверить начальные данные.

Проверка себя

1. Найдите ядро для $y'' - y = f$. *Ответ:* $K(x,\tau) = \sinh(x-\tau)$.
2. Решите $y'' = x$, $y(0) = y'(0) = 0$ через ядро. *Ответ:* $\int_0^x (x-\tau)\tau\, d\tau = \frac{x^3}{6}$.
3. Как изменяется формула для $2y'' + 2y = f$? *Ответ:* после деления на 2 получается $\frac{1}{2}\int_{x_0}^x \sin(x-\tau) f(\tau)\, d\tau$ плюс решение однородной задачи с начальными данными.
4. Для $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ найдите решение. *Ответ:* $2\cos x + 3\sin x + \int_0^x \sin(x-\tau)\, d\tau = 1 + \cos x + 3\sin x$.

Частые ошибки

Верхний предел интеграла — независимая переменная x. Производные ядра берутся по первому аргументу; запись $K_x(\tau,\tau)$ не означает полную производную вдоль диагонали.

Условие последней производной ядра равно единице только после нормировки старшего коэффициента. Для $n = 1$ ядро на диагонали равно единице. На интервале с разрывом f, например через полюс тангенса, сформулированная теорема не применяется.

БИЛЕТ 23

Общее решение ЛОС с постоянными коэффициентами

Источники: конспект лекций, с. 98-104; сборник, с. 100-104

Объём ответа: Построение по жордановым цепочкам и полное доказательство ФСР

Доработка по фотографиям: вопрос 21

IMG_2002–IMG_2007; главы 23.

Что требуется. Собственные и присоединённые векторы; три случая; построение и доказательство ФСР.

Для цепочки $v_0, \dots, v_{k-1}$ правильные условия $(A-\lambda E)v_0 = 0$, $(A-\lambda E)v_j = v_{j-1}$. Соответствующие решения:

$$x_j(t) = e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{j}\frac{t^r}{r!}v_{j-r}, \quad 0 \le j < k.$$

При дифференцировании получаем $x_j' = \lambda x_j + x_{j-1}$ для $j \ge 1$, а применение A даёт ровно это выражение. Для $j = 0$ обе части равны λx_0. В момент нуль решения равны векторам цепочки; все цепочки вместе составляют жорданов базис, значит полученные n решений независимы.

Кратное собственное значение не обязательно требует степеней t: у $A = 2E$ два независимых собственных вектора и две клетки размера один. У $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ одна клетка: решения $e^{2t}(1,0)^T$ и $e^{2t}(t,1)^T$. Для невещественных цепочек вещественной матрицы берём действительные и мнимые части сопряжённых решений.

Понять смысл

У скалярного уравнения постоянные коэффициенты приводят к характеристическим корням и функциям $t^j e^{\lambda t}$. В системе те же функции умножаются на векторы, причём векторы нельзя выбирать независимо: между ними действуют цепочные связи. Кратное собственное значение само по себе ещё не создаёт множитель t. Он возникает при нехватке собственных векторов, то есть при нетривиальной жордановой клетке.

Задача билета — построить *все* решения системы $\dot{u} = Au$, а не только проверить $e^{\lambda t}v$ для собственного вектора. Проверка одной экспоненты покрывает лишь диагонализируемый случай. Общий случай требует присоединённых векторов, проверки цепочной формулы и доказательства независимости всех построенных решений.

Точная формулировка и понятия

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — постоянная матрица. Характеристический многочлен — $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$; равенство $p(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением. Собственное значение λ имеет ненулевой собственный вектор h_1, если

$$(A - \lambda E)h_1 = 0.$$

Алгебраическая кратность — кратность корня p, геометрическая — размерность $\ker(A - \lambda E)$. Собственное значение называют полупростым, если эти кратности равны; эквивалентно, все его жордановы клетки имеют размер один.

Жорданова цепочка длины k для λ — векторы $h_1, \dots, h_k$, удовлетворяющие

$$h_1 \neq 0, \quad (A - \lambda E)h_1 = 0, \quad (A - \lambda E)h_j = h_{j-1} \quad (2 \le j \le k).$$

Они линейно независимы: если $\sum c_j h_j = 0$ и c_m — последний ненулевой коэффициент, применение $(A - \lambda E)^{m-1}$ даёт $c_m h_1 = 0$, противоречие.

Для каждой цепочки длины k определим k вектор-функций

$$u_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^r}{r!} h_{j-r}, \qquad 1 \le j \le k.$$

В частности,

$$u_1 = e^{\lambda t} h_1, \quad u_2 = e^{\lambda t}(h_2 + t h_1), \quad u_3 = e^{\lambda t}\left(h_3 + t h_2 + \frac{t^2}{2} h_1\right).$$

Теорема. Если цепочки в совокупности составляют жорданов базис $\mathbb{C}^n$, то соответствующие n функций составляют ФСР системы. Все решения — их линейные комбинации с постоянными коэффициентами. Если k_λ — максимальный размер клетки для λ, то компактная запись имеет вид

$$u(t) = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} e^{\lambda t} P_\lambda(t), \qquad \deg P_\lambda \le k_\lambda - 1.$$

Коэффициенты векторных многочленов связаны цепочками и зависят суммарно от n произвольных постоянных. Это не набор произвольных независимых многочленов указанной степени.

Откуда берётся жорданов базис

Для ОДУ можно использовать теорему Жордана из линейной алгебры. Следующее короткое обоснование показывает, какая конструкция за ней стоит. Пространство раскладывается в прямую сумму обобщённых собственных подпространств

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda G_\lambda, \qquad G_\lambda = \ker(A - \lambda E)^{m_\lambda},$$

где m_λ — алгебраическая кратность. Это следствие теоремы Гамильтона-Кэли и тождества Безу для попарно взаимно простых множителей $(z - \lambda)^{m_\lambda}$: существуют полиномиальные проекторы, равные единице по одному из этих модулей и нулю по остальным. После подстановки $z = A$ их сумма равна E, образы лежат в соответствующих G_λ, а попарные произведения равны нулю. Поэтому разложение существует и единственно.

На G_λ оператор $N = A - \lambda E$ нильпотентен. Докажем индукцией по размерности, что для любого нильпотентного N существует базис цепочек. При $N = 0$ любой базис состоит из цепочек длины один. В остальных случаях пространство $W = NV$ имеет меньшую размерность и инвариантно относительно N. По предположению индукции выберем в W цепочный базис $w_{i,1}, \dots, w_{i,k_i}$. Каждый последний вектор w_{i,k_i} принадлежит NV, поэтому имеет прообраз $v_i \in V$. Добавим этот прообраз в конец цепочки: $Nv_i = w_{i,k_i}$.

Полученные удлинённые цепочки независимы. Действительно, применение N к линейной комбинации их векторов уничтожает лишь первые векторы, а образы остальных составляют базис W; их коэффициенты поэтому нулевые. Остаётся комбинация первых векторов исходных цепочек, которые также независимы. Пусть U — линейная оболочка удлинённых цепочек. Тогда $NU = W = NV$. Для каждого $v \in V$ найдётся $u \in U$ с $Nu = Nv$, значит $v - u \in \ker N$ и $V = U + \ker N$. Дополнив базис $U \cap \ker N$ до базиса $\ker N$, добавляем недостающие цепочки длины один. Получен базис всего V. Применение этой конструкции в каждом G_λ даёт жорданов базис.

Практически цепочки находят решением линейных систем с матрицей $A - \lambda E$. Уравнение для присоединённого вектора — *матричное* $(A - \lambda E)h_2 = h_1$; определитель вместо матрицы здесь недопустим. Не каждый выбранный собственный вектор обязательно можно продолжить в цепочку нужной длины: нужно проверять, принадлежит ли он соответствующему образу.

Доказательство теоремы о решениях

Положим $h_0 = 0$ и обозначим полиномиальную сумму в u_j через $v_j(t)$. Из определения цепочки

$$(A - \lambda E)v_j = \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^r}{r!} h_{j-r-1} = v_j'(t).$$

Последнее слагаемое в первой сумме содержит h_0 и исчезает; остальные совпадают с производной после смены индекса. Поэтому

$$\dot{u}_j = e^{\lambda t}(\lambda v_j + v_j') = e^{\lambda t}(\lambda E + A - \lambda E)v_j = Au_j.$$

Это проверка каждого построенного решения, включая присоединённые.

Число функций равно сумме длин всех цепочек, то есть n. При $t = 0$ имеем $u_j(0) = h_j$. Следовательно, матрица $X(0)$ из их значений состоит из векторов жорданова базиса и обратима. Значит, решения линейно независимы и образуют ФСР. Для любого начального вектора $u(0) = u_0$ система $X(0)C = u_0$ имеет единственное решение; функция $X(t)C$ удовлетворяет задаче Коши, а по единственности других решений нет. Так доказывается именно полнота общего решения.

Если $A = SJS^{-1}$, тот же результат записывается

$$u(t) = Se^{Jt}C, \qquad e^{J_k t} = e^{\lambda t}\left(E + tN + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}\right),$$

где $J_k = \lambda E + N$, $N^k = 0$. Нормированная фундаментальная матрица равна $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, и решение с данными в t_0 есть $e^{A(t-t_0)}u_0$.

Как получить вещественное решение

Если A вещественна, вещественным корням можно выбрать вещественные цепочки. Для сопряжённых корней $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, цепочки выбираются сопряжёнными. Взяв для каждого решения одной цепочки вещественную и мнимую части, получаем вещественные решения.

Например, при $h = p + iq$ и $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda t}h) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t),$$

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda t}h) = e^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t).$$

Они независимы в составе вещественной ФСР: переход от сопряжённой пары к вещественной и мнимой частям задаётся обратимой постоянной матрицей. Отдельно доказывать независимость длинными тригонометрическими вычислениями не нужно.

Пример: трёхзвенная цепочка

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Единственное собственное значение 2 имеет алгебраическую кратность три, но собственное подпространство одномерно. Стандартные векторы образуют цепочку $h_1 = e_1, h_2 = e_2, h_3 = e_3$. Общее решение:

$$u(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + \frac{C_3 t^2}{2} \\ C_2 + C_3 t \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

При $u(0) = (0,0,1)^{\mathsf{T}}$ получаем $e^{2t}(\frac{t^2}{2}, t, 1)^{\mathsf{T}}$. При $C_3 = 0$ степень полиномиального множителя снижается, а при $C_2 = C_3 = 0$ остаётся чистая экспонента. Поэтому утверждение «степень каждого решения равна двум» ошибочно.

Для сравнения, у $A = 2E$ собственное значение тоже трёхкратное, но все три клетки имеют размер один и $u = e^{2t}C$. Алгебраическая кратность одинакова, структура решений различна.

Ответ у доски

Определить собственный и присоединённый векторы, цепочку, жорданов базис. Написать общую формулу u_j. Проверить $v_j' = (A - \lambda E)v_j$, затем $\dot{u}_j = Au_j$. Подставить $t = 0$ и использовать базисность цепочек. Сослаться на единственность для полноты. Для вещественной матрицы объяснить переход к вещественным и мнимым частям.

Проверка себя

1. Решите $\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$. *Ответ:* $u = (C_1 + C_2 t, C_2)^{\mathsf{T}}$.

2. Достаточно ли знать, что у матрицы порядка четыре единственный корень -1 кратности четыре, чтобы назвать максимальную степень t? *Ответ:* нет; нужны размеры клеток. Возможная максимальная степень — от нуля до трёх.
3. Для $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ выпишите вещественную ФСР. *Ответ:* $(\cos t, \sin t)^{\mathsf{T}}$ и $(-\sin t, \cos t)^{\mathsf{T}}$.
4. Почему для одной цепочки нельзя заменить $\frac{t^2}{2}$ на t^2? *Ответ:* производная должна совпасть с предыдущим звеном; без факториала коэффициент при th_1 станет равен двум.

Частые ошибки

Не путать характеристический многочлен с уравнением. Не подменять матричное произведение определителем. Не считать кратный корень достаточным основанием для множителя t. Не ограничиваться доказательством экспоненциального решения. Не объявлять коэффициенты всех P_λ независимыми. Степень в общем решении ограничена сверху размером наибольшей клетки минус один и может снижаться при специальных начальных данных.

БИЛЕТ 24

ЛНС с векторным квазимногочленом

Источники: конспект лекций, с. 105-109; сборник, с. 105-109

Объём ответа: Полное доказательство нерезонансного случая и жордановых оценок степени

Доработка по фотографиям: вопрос 22

IMG_2008; главы 24.

Что требуется. Полное восстановление отсутствующего ответа: определения, степень, резонанс и доказательство.

На IMG_2008 после вопроса нет ответа. Векторный многочлен $P_N(t) = \sum p_j t^j$ имеет степень N, если $p_N \neq 0$; степень равна максимуму степеней координат. В системе $u' = Au + e^{\mu t} P_N$ положим $u = e^{\mu t} Q$, $B = \mu E - A$. Тогда $Q' + BQ = P_N$.

Если B обратима, ищем $Q = \sum_{j=0}^{N} q_j t^j$ и сравниваем коэффициенты:

$$Bq_j + (j+1)q_{j+1} = p_j, \quad q_{N+1} = 0.$$

Сначала $q_N = B^{-1} p_N$, затем $q_j = B^{-1}(p_j - (j+1)q_{j+1})$. Получаем единственный полином степени N.

При резонансе переходим к жордановым клеткам. В клетке размера k для $\lambda = \mu$ последовательно решаем $v_k' = r_k$, $v_{k-1}' = v_k + r_{k-1}$ и так далее. Каждый шаг интегрирования увеличивает верхнюю границу степени на единицу. Поэтому существует Q степени не выше $N + k_\mu$, где k_μ — размер самой длинной резонансной клетки. Равенство не обязательно.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = 0$. Для $P = (0,1)^T$ частное решение $(t^2/2, t)^T$, степень $2 = N + k_\mu$. Для $P = (1,0)^T$ подходит $(t, 0)^T$, степень только 1. Скалярный множитель t^s нельзя без доказательства одинаково навязывать всем координатам системы.

Понять смысл

Векторный вариант метода неопределённых коэффициентов устроен сложнее скалярного: компоненты связаны матрицей A. Воздействие на одну координату может через жорданову цепочку вызвать многократное интегрирование в другой. Поэтому величина резонанса определяется размером жордановой клетки, а не только кратностью корня характеристического многочлена.

Особенно важно различать существование решения с *оценкой* степени и неизбежность достижения этой оценки. Даже если матрица допускает сильный резонанс, конкретная правая часть может не возбуждать соответствующую цепочку. Теорема гарантирует достаточный класс пробных функций; она не утверждает, что все их старшие коэффициенты ненулевые.

Точная формулировка

Векторный многочлен степени N — функция

$$P(t) = p_N t^N + \cdots + p_0, \qquad p_j \in \mathbb{C}^n, \quad p_N \neq 0.$$

Его степень — максимальная степень среди компонент. Векторный квазимногочлен имеет вид $e^{\mu t}P(t)$; конечные суммы таких выражений обрабатываются по принципу суперпозиции.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ постоянна, $\mu \in \mathbb{C}$, P — ненулевой векторный многочлен степени N. Тогда система

$$\dot{u} = Au + e^{\mu t}P(t)$$

имеет частное решение $u_p = e^{\mu t}Q(t)$, где Q — векторный многочлен, причём:

- если $\mu \notin \operatorname{spec} A$, то $\deg Q = N$, и полиномиальное Q единственно;
- если $\mu \in \operatorname{spec} A$ и k_μ — максимальный размер клетки для μ, можно выбрать Q так, что $\deg Q \leq N + k_\mu$.

Во втором случае равенство степени не гарантируется, а полиномиальное Q обычно не единственно. Вещественные правые части с синусами и косинусами получаются взятием вещественных частей комплексных частных решений.

Доказательство: сначала убрать экспоненту

Подстановка $u = e^{\mu t}Q$ даёт

$$\mu e^{\mu t}Q + e^{\mu t}Q' = e^{\mu t}AQ + e^{\mu t}P, \qquad Q' + BQ = P, \quad B = \mu E - A.$$

В отличие от исходной системы, правая часть теперь полиномиальна. Нужно решить это уравнение в классе многочленов, а не найти произвольное решение с интегралами.

Нерезонанс: B обратима

Положим $Q = \sum_{j=0}^{N} q_j t^j$, $q_{N+1} = 0$. Приравнивая коэффициенты при t^j, получаем

$$Bq_j + (j+1)q_{j+1} = p_j, \qquad 0 \leq j \leq N.$$

Решаем сверху вниз:

$$q_N = B^{-1}p_N, \qquad q_j = B^{-1}(p_j - (j+1)q_{j+1}).$$

Все коэффициенты найдены однозначно. Так как $p_N \neq 0$ и B обратима, $q_N \neq 0$, поэтому степень равна N.

В классе всех векторных многочленов других решений нет. Если разность R двух решений была бы ненулевым многочленом степени m, то из $R' + BR = 0$ старший коэффициент удовлетворял бы $Br_m = 0$, невозможно. Заметим также явную конечную формулу

$$Q = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j B^{-j-1} P^{(j)}.$$

При подстановке слагаемые телескопически сокращаются, а $P^{(N+1)} = 0$. Эта формула полезна для быстрой проверки, но вычисление через рекурсию часто проще.

Резонанс: переход к клеткам

Пусть $A = SJS^{-1}$, S обратима. Положим $Q = SV$ и $R = S^{-1}P$. Невырожденное постоянное преобразование сохраняет степень векторного многочлена: старший коэффициент p_N превращается в $S^{-1}p_N \neq 0$. Уравнение принимает вид

$$V' = (J - \mu E)V + R.$$

Оно распадается на независимые подсистемы по жордановым клеткам. Если собственное значение клетки $\lambda \neq \mu$, матрица $\mu E - J_\lambda$ обратима; уже доказанный случай даёт степень соответствующей части V не выше N.

Для клетки размера k с $\lambda = \mu$ остаётся нильпотентная система

$$v_1' = v_2 + r_1(t), \quad v_2' = v_3 + r_2(t), \quad \dots, \quad v_{k-1}' = v_k + r_{k-1}(t), \quad v_k' = r_k(t),$$

где $\deg r_j \leq N$. Решаем снизу вверх, выбирая, например, нулевые постоянные интегрирования. Последняя координата имеет степень не выше $N + 1$. В предпоследнем уравнении правая часть имеет степень не выше $N + 1$, значит $\deg v_{k-1} \leq N + 2$. Индукцией

$$\deg v_j \leq N + k - j + 1, \qquad 1 \leq j \leq k.$$

Таким образом, степень всего блока не выше $N + k$. Здесь следует говорить «не выше»: некоторые правые части могут быть нулевыми, их старшие члены могут сокращаться.

Собираем решения блоков. Наибольшее возможное повышение задаётся самым длинным *резонансным* блоком, поэтому $\deg V \leq N + k_\mu$. Возвращение $Q = SV$ сохраняет фактическую степень и, в частности, найденную верхнюю границу. Умножение на $e^{\mu t}$ завершает доказательство.

Как выбирать пробную функцию

Если резонанса нет, берут $e^{\mu t}(q_N t^N + \dots + q_0)$ и решают матричную рекурсию. Если резонанс есть, можно взять полный векторный многочлен степени $N + k_\mu$ с неизвестными коэффициентами и приравнять коэффициенты. Некоторая свобода ответа соответствует однородным решениям; её допустимо устранить удобным выбором свободных параметров.

Более экономный путь — перейти к цепочным координатам и интегрировать снизу вверх. В исходных координатах нельзя автоматически домножать *весь* пробный вектор на t^{k_μ} по скалярному правилу. Для разных координат требуются разные степени, и такое искусственное ограничение иногда исключит все подходящие решения.

При нескольких показателях μ_j задача решается для каждого отдельно. Найденные частные решения складываются, а общее решение ЛНС получается добавлением ФСР из билета 23. Начальные условия лучше накладывать только после этого, иначе можно спутать произвольные постоянные однородной части с коэффициентами выбранного частного решения.

Пример: граница достигается и не достигается

Рассмотрим

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mu = 1$, $N = 1$, единственная клетка имеет размер два. После $u = e^t Q$:

$$q_2' = t, \qquad q_1' = q_2.$$

Берём $q_2 = \frac{t^2}{2}$, $q_1 = \frac{t^3}{6}$. Поэтому

$$u_p = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad u = e^t \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + \frac{t^3}{6} \\ C_2 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Здесь степень $N + k_\mu = 3$ действительно достигается. Проверка особенно проста после снятия экспоненты: производные компонент равны именно правым частям треугольной системы.

Теперь оставим ту же матрицу, но возьмём воздействие $e^t(1,0)^{\mathsf{T}}$. Теорема допускает степень до двух. Однако $Q = (t,0)^{\mathsf{T}}$ уже подходит и имеет степень один. Более того, $Q = (0,-1)^{\mathsf{T}}$ также подходит: $Q' = 0$, а $(A - E)Q + (1,0)^{\mathsf{T}} = 0$. Степень может быть даже нулевой. Разность этих двух частных решений является однородным решением $e^t(t,1)^{\mathsf{T}}$.

Ответ у доски

Определить степень векторного многочлена. Сформулировать оба случая с правильным знаком $\le$ в резонансе. Сделать замену $u = e^{\mu t} Q$. Нерезонанс доказать обратимостью $\mu E - A$ и рекурсией старших коэффициентов. Резонанс — жордановой формой и последовательным интегрированием блока снизу вверх. Объяснить сохранение степени при невырожденной замене координат.

Проверка себя

1. При $A = \operatorname{diag}(1,2)$ найдите частное решение для правой части $e^{3t}(1,t)^{\mathsf{T}}$. *Ответ:* $u_p = e^{3t}(\frac{1}{2}, t-1)^{\mathsf{T}}$.
2. Для $A = 0$ и правой части $e^{0t}(t^2,1)^{\mathsf{T}}$ найдите Q. *Ответ:* $(\frac{t^3}{3}, t)^{\mathsf{T}}$; максимальная клетка имеет размер один.
3. У μ алгебраическая кратность пять, клетки размеров три и два, $N = 2$. Какую границу гарантирует теорема? *Ответ:* $\deg Q \le 5$, а не 7.
4. Почему попытка $Q = t^2(a,b)^{\mathsf{T}}$ не решает пример с воздействием $(0,1)^{\mathsf{T}}$ и нильпотентной клеткой размера два? *Ответ:* нужно $Q = (\frac{t^2}{2}, t)^{\mathsf{T}}$; вторая координата должна иметь степень один.

Частые ошибки

Размер клетки и алгебраическая кратность не взаимозаменяемы. Степень многочлена — максимум по координатам, а не сумма. При резонансе теорема даёт верхнюю границу, не

обязательное равенство. Невырожденная замена сохраняет степень всего векторного многочлена, хотя степень отдельной компоненты может уменьшиться. Прямое скалярное правило $t^s Q_N$ без учёта связей между компонентами для систем не является универсальным.

БИЛЕТ 25

Автономные системы и фазовые траектории

Источники: конспект лекций, с. 110-112; сборник, с. 110-112

Объём ответа: Определения и полные доказательства свойств траекторий

Доработка по фотографиям: вопрос 23

IMG_2009–IMG_2013; главы 25.

Что требуется. Определения; сдвиг времени, непересечение, повторное прохождение точки, период и цикл.

В автономной системе $u' = F(u)$ уравнение не содержит время явно. Поэтому $v(t) = u(t + c)$ — решение на сдвинутом интервале: $v' = F(u(t + c)) = F(v)$. Если $u(t_1) = v(t_2)$, выравниваем время сдвигом и используем единственность. Для максимальных орбит получаем совпадение целых образов; для произвольных участков — совпадение согласованных частей.

Если непостоянное решение повторно проходит одну точку, участок между двумя прохождениями можно периодически повторить. Значения и производные на стыках совпадают, поскольку производная равна одному и тому же F в повторённой точке. Так получаем глобальное периодическое решение.

Дополним обоснование минимального периода. В непостоянной орбите $F \neq 0$: иначе единственность заставила бы решение быть равновесием. Поэтому одна координата локально строго монотонна, и достаточно малых положительных периодов нет. Предел последовательности периодов снова является периодом по непрерывности. Следовательно, положительная нижняя грань периодов достигается; на одном минимальном периоде повторных точек нет. Неподвижная точка — равновесие, а не непостоянный цикл.

Понять смысл

В автономной системе закон движения зависит от состояния, но не от показания часов. Поэтому одна и та же точка фазового пространства не может иметь две разные скорости. Однако для непересечения траекторий мало одной однозначности правой части: нужна ещё единственность задачи Коши. Именно она не позволяет двум движениям после встречи «разойтись».

График решения и фазовая траектория — разные объекты. График $\{(t, u(t))\}$ живёт в пространстве времени и состояний, а фазовая траектория $\{u(t)\}$ — только в пространстве состояний. Периодическое движение имеет незамкнутый график, но замкнутую фазовую траекторию. Сдвиг времени меняет график и не меняет полную фазовую траекторию.

Точная постановка и определения

Рассматриваем

$$\dot{u} = F(u), \qquad u \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

где G открыто, F непрерывна и локально липшицева по u. Достаточное удобное условие — $F \in C^1(G)$. Все утверждения ниже о единственности относятся именно к таким системам. Максимальным решением называется решение, которое нельзя продолжить на больший интервал, оставаясь решением в G.

- *Фазовое пространство* G — множество допустимых состояний.
- *Фазовая траектория*, или орбита, — образ максимального решения в G с указанием направления времени. Когда рассматривается лишь часть интервала, получается участок орбиты.
- *Равновесие* a определяется равенством $F(a) = 0$ и соответствует постоянному решению $u(t) \equiv a$.
- *Цикл* — орбита непостоянного периодического решения. Неподвижная точка циклом не называется, хотя постоянная функция формально имеет любой положительный период.
- *Фазовый портрет* — совокупность всех орбит, включая равновесия, с направлениями движения.

Вектор $F(u)$ касателен к орбите и задаёт скорость. В точке равновесия скорость равна нулю; нормированное направление вектора там не определено. При $F(a) \neq 0$ хотя бы одна координата решения имеет ненулевую производную и локально монотонна, поэтому орбита локально является регулярной кривой без самопересечения.

Сдвиг времени: формулировка и доказательство

Если $u(t)$ решает систему на интервале I, то $v(t) = u(t + c)$ решает её на $I - c$. По цепному правилу

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t + c) = F(u(t + c)) = F(v(t)).$$

Поскольку $t + c$ пробегает весь I, образы u и v совпадают. Существенно, что справа нет явного времени: для $\dot{u} = f(t, u)$ после сдвига получается $f(t + c, v)$, обычно другое уравнение.

Непересечение полных траекторий

Утверждение. Две полные орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Если $u(t_1) = v(t_2)$, то решения совпадают после сдвига времени.

Доказательство. Введём $w(t) = v(t + t_2 - t_1)$. По предыдущему свойству это решение той же системы, причём $w(t_1) = u(t_1)$. Единственность задачи Коши даёт совпадение в некоторой окрестности t_1. Оно продолжается на весь общий интервал: множество моментов совпадения замкнуто по непрерывности и открыто по локальной единственности; общий интервал связен. Совпадающие на пересечении решения склеиваются на объединении двух интервалов. Если интервалы различались, объединение строго расширяло бы хотя бы один из них, вопреки максимальности. Поэтому интервалы совпадают; совпадают функции и их образы.

Условие полноты нельзя незаметно опускать: два разных участка одной орбиты могут пересекаться, не совпадая как множества. Теорема говорит о максимальных орбитах, а для участков — лишь о согласованности после сдвига на общем промежутке.

Повторное прохождение точки и периодичность

Пусть u непостоянно и $u(t_1) = u(t_2)$, $t_2 > t_1$. Тогда $T = t_2 - t_1$ — период после глобального продолжения решения, а его образ — цикл.

Для аккуратного доказательства возьмём участок $[t_1, t_2]$ и повторим его с периодом T на всей прямой. Значения на стыках совпадают. Производные также совпадают, поскольку на обоих концах они равны одному вектору $F(u(t_1))$. Полученная функция класса C^1 решает систему и продолжает исходный участок. По единственности она совпадает с исходным максимальным решением; значит, оно определено на всей $\mathbb{R}$ и периодично.

Почему у непостоянного решения можно говорить о простом замкнутом цикле? В его точках $F \neq 0$, поэтому локальная монотонность одной координаты исключает сколь угодно малые положительные периоды. Множество периодов замкнуто и замкнуто относительно разности; оно имеет наименьший положительный элемент T_*. На $[0, T_*)$ разные моменты не дают одинаковой точки, иначе появился бы меньший период. Поэтому цикл не имеет настоящего пересечения типа «восьмёрки».

Итак, максимальная орбита — либо точка, либо цикл, либо образ инъективного непериодического движения. Последняя орбита может иметь сложное предельное множество; классификация не утверждает, что она обязана быть прямой или уходить в бесконечность.

Можно ли достичь равновесия?

Непостоянное решение не может попасть в равновесие за конечное время. Если $u(t_*) = a$, $F(a) = 0$, то через данные (t_*, a) проходят u и постоянное решение a. Единственность в обе стороны по времени заставляет их совпасть, противоречие.

Немного сильнее: непостоянное решение не может даже иметь предел $a \in G$ при конечном конце максимального интервала, если $F(a) = 0$. При существовании такого конечного предела решение продолжается через конец интервала задачей Коши из a; непрерывность F обеспечивает согласование производных. Продолженное решение достигает равновесия, и предыдущий аргумент снова даёт противоречие. Приближение к равновесию возможно лишь при бесконечном времени, если не нарушены условия теоремы.

Полезно и обратное наблюдение: если $u(t) \to a \in G$ при $t \to +\infty$, то $F(a) = 0$. Иначе найдётся координата с $F_j(a) \neq 0$. По непрерывности в достаточно малой окрестности a производная $\dot{u}_j$ имеет постоянный знак и модуль не меньше некоторого $c > 0$. Решение в итоге остаётся в этой окрестности, и интегрирование даёт неограниченное изменение u_j, несовместимое с конечным пределом. Аналогично для $t \to -\infty$.

Примеры и построение портрета

Для $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$:

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-2t}.$$

Если $C_1 \neq 0$, исключение времени даёт $y = Cx^2$, причём знак x постоянен. Каждая полупарабола — отдельная орбита; ось $x = 0$ рассматривается отдельно. Стрелки направлены к началу координат. Никакая непостоянная траектория не достигает его за конечное время, хотя все стремятся к нему при $t \to +\infty$.

Для $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ решения описывают окружности $x^2 + y^2 = r^2$. При $r > 0$ они имеют период 2π; при $r = 0$ получается равновесие, которое нужно исключить из определения цикла.

В отсутствие единственности выводы меняются. У скалярного уравнения $\dot{u} = 3|u|^{\frac{2}{3}}$ есть решение

$$u(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a, \\ 0, & t \geq a. \end{cases}$$

Оно достигает равновесия за конечное время. Правая часть непрерывна, но не локально липшицева в нуле. Поэтому этот пример не опровергает доказанные теоремы, а показывает необходимость их гипотез.

Ответ у доски

Дать определения и назвать условие единственности. Проверить сдвиг времени. Свести встречу двух орбит к одинаковым начальным данным. Повторное прохождение одной точки превратить в периодическое продолжение; отдельно исключить постоянное решение. Недостижимость равновесия вывести сравнением с постоянным решением. При вопросе о пределе объяснить, почему конечный предел внутри области обязан быть равновесием.

Проверка себя

1. Может ли решение $\dot{u} = u^2$ с $u(0) < 0$ достичь нуля? *Ответ:* нет; $u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t} \to 0$ лишь при $t \to +\infty$.
2. Два решения автономной системы имеют одинаковые значения в разные моменты. Обязаны ли они совпадать при одинаковом t? *Ответ:* нет; они совпадают после соответствующего сдвига времени.
3. Может ли непостоянная периодическая траектория содержать равновесие? *Ответ:* нет, по единственности.
4. Запрещены ли теоремой гомоклинические петли? *Ответ:* нет. Такая орбита подходит к одному равновесию при $t \to \pm\infty$, но не включает его при конечном времени и не является самопересекающимся периодическим решением.

Частые ошибки и границы источника

Не выводить непересечение из одной непрерывности. Не путать полную орбиту с участком. Не называть равновесие циклом. Замкнутая картинка, содержащая равновесие как

предельную точку, ещё не доказывает периодичность. В доступном конспекте лекций записаны начало темы и сдвиг времени; оставшаяся часть охвата восстановлена по сборнику и приведена здесь с полными условиями и доказательствами.

БИЛЕТ 26

Классификация линейных особых точек на плоскости

Источники: сборник, с. 113-122; фотографии тетради, вопрос 24

Объём ответа: Теорема Пуанкаре: формулировка; все линейные случаи с построением траекторий

Доработка по фотографиям: вопрос 24

IMG_2014–IMG_2019; главы 26.

Что требуется. Классификация при det A ≠ 0; все случаи, примеры, исключительные направления и кривые.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ даёт $dy/dx = (cx + dy)/(ax + by)$ там, где знаменатель не нуль. При $\det A \neq 0$ начало — единственная особая точка. Вещественные корни разных знаков: седло; разные одного знака: узел; повторный ненулевой: звёздный узел при $A = \lambda E$ либо неправильный узел с клеткой размера два. Чисто мнимые корни дают центр, остальные невещественные — фокус.

Уточнение рисунков: для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$ ответ $y = Cx^2$ не включает ось $x = 0$, её добавляем отдельно. Каждая парабола распадается на две орбиты; равновесие между ними не проходится за конечное время. Для $\dot{x} = x$, $\dot{y} = x + y$ получаем $y = x(\ln|x| + C)$ и отдельно вертикальные лучи.

Пример фокуса на снимке: $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -x + y$. В полярных координатах $\dot{r} = r$, $\dot{\theta} = -1$; значит $r = Ce^{-\theta}$ на развёрнутом угле. Это спирали по часовой стрелке, наружу при росте времени. Циклов нет. Для $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ имеем $r' = 0$: окружности и центр. Не переносим классификацию линейного центра на нелинейную систему без отдельного обоснования.

Понять смысл и точная постановка

Рассматриваем вещественную систему

$$\dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = cx + dy, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Её единственное равновесие — начало координат. На участках с $ax + by \neq 0$ можно исключить время:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}.$$

Это уравнение описывает графиковые участки фазовых кривых. Вертикальные касательные, отдельные вертикальные траектории и полный цикл удобнее исследовать через систему; деление на $\dot{x}$ не должно приводить к их потере.

Обратимая вещественная линейная замена координат переводит матрицу в канонический вид. Она сохраняет пересечения, замкнутость, приближение к нулю и качественный тип, но не обязана сохранять углы, длины и форму окружности. Стрелки определяются увеличением времени. Замена A на $-A$ сохраняет геометрические кривые и обращает все стрелки.

Теорема Пуанкаре о линейной классификации

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения A, $\det A \neq 0$.

1. Два вещественных корня разных знаков дают седло.
2. Два различных вещественных корня одного знака дают узел.
3. При совпадающих вещественных корнях $\lambda \neq 0$ получаем дикритический, или звёздный, узел, если $A = \lambda E$, и вырожденный, или неправильный, узел при одной клетке размера два.
4. Корни $\pm i\beta$, $\beta \neq 0$, дают центр.
5. Корни $\alpha \pm i\beta$, $\alpha\beta \neq 0$, дают фокус.

Узел и фокус асимптотически устойчивы при отрицательных вещественных частях корней и неустойчивы при положительных. Седло неустойчиво. Линейный центр устойчив, но не асимптотически устойчив. Теорема в этом билете классифицирует *линейную* систему; перенос на нелинейную требует отдельной теоремы и её условий.

Седло: противоположные знаки

В собственных координатах система имеет вид

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \qquad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta, \qquad \lambda_1 > 0 > \lambda_2.$$

Решения $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Если обе координаты ненулевые,

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

причём каждая ветвь рассматривается при фиксированном знаке ξ. На оси ξ движение идёт от нуля, на оси η — к нулю. Эти четыре полуоси — сепаратрисы; остальные траектории не подходят к нулю ни в одном направлении времени.

Пример: $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, то есть $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Вне осей $xy = C$. Для рисунка сначала проводят оси со стрелками, затем по гиперболе в каждом секторе. При $t \to +\infty$ ненулевая x-компонента растёт, а y-компонента убывает; это задаёт стрелки без догадок. Циклов нет.

Обычный узел: разные корни одного знака

Возьмём устойчивый пример

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = -2y, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Получаем $y = Cx^2$ и отдельно $x = 0$. Каждую параболу нужно разделить на две ветви знаком x, потому что переход через равновесие за конечное время невозможен. Обе собственные

оси инвариантны. Все неосевые траектории при подходе к нулю касаются оси медленно затухающей моды e^{-t}: $\frac{y}{x} = (\frac{C_2}{C_1})e^{-t} \to 0$.

Вообще при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, почти все подходящие к нулю траектории касаются собственного направления λ_1; исключение — прямая второго собственного вектора. Если оба корня положительны, подход к нулю рассматривается при $t \to -\infty$, а стрелки направлены наружу. В исходных координатах оси заменяются прямыми собственных векторов.

Дикритический узел: два собственных вектора

Если у повторного корня λ есть два независимых собственных вектора, матрица порядка два равна λE. Следовательно,

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \qquad y = C_2 e^{\lambda t}.$$

Фазовые траектории — отдельные лучи из нуля; само начало — ещё одна орбита. Все направления являются направлениями подхода к равновесию в соответствующем конце времени. Пример $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = 2y$ даёт $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; стрелки наружу. При коэффициенте -2 стрелки идут к нулю.

Важно, что луч и целая прямая — не одно и то же: положительный множитель $e^{\lambda t}$ не меняет знак вектора. Два противоположных луча одной прямой являются разными орбитами.

Вырожденный узел: один собственный вектор

Удобный пример, согласованный с формой из сборника:

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = x + y, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Матрица имеет повторный корень 1 и единственное собственное направление $x = 0$. Решение

$$x = C_1 e^t, \qquad y = e^t(C_2 + C_1 t).$$

При $C_1 \neq 0$ исключение времени даёт

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Дополнительно имеются два вертикальных луча $x = 0$. При $t \to -\infty$ все эти траектории подходят к нулю и касаются вертикального собственного направления: для неосевых траекторий $\frac{y}{x} = t + \frac{C_2}{C_1}$ неограниченно, а нормированный вектор стремится к одному из вертикальных единичных векторов. Равновесие неустойчиво, поскольку при увеличении времени движения уходят от него.

Для эскиза отмечают вертикальную собственную прямую, горизонтальные касательные на $y = -x$, наклон 1 на $y = 0$ и семейство логарифмических кривых. При смене знака всей матрицы получаются те же кривые устойчивого узла с обратными стрелками. Слово «вырожденный» здесь относится к геометрии повторного корня, хотя $\det A = 1 \neq 0$.

Фокус: комплексные корни с ненулевой вещественной частью

В подходящих вещественных координатах

$$\dot{\xi} = \alpha\xi - \beta\eta, \qquad \dot{\eta} = \beta\xi + \alpha\eta, \qquad \beta \neq 0.$$

В полярных координатах $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$:

$$\dot r = \alpha r, \qquad \dot\theta = \beta, \qquad r = r_0 e^{\alpha(t-t_0)}, \quad r = C\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\theta\right).$$

При $\alpha < 0$ траектории спирально приближаются к нулю, при $\alpha > 0$ удаляются. Знак β в этих координатах определяет вращение. После преобразования с отрицательным определителем ориентация плоскости меняется, поэтому в исходных координатах направление вращения лучше проверить по полю в одной точке.

Пример из сборника: $\dot x = x - y$, $\dot y = x + y$. Здесь $\alpha = \beta = 1$, $r = Ce^{\theta}$, движение наружу против часовой стрелки. Уравнение траекторий $y' = \frac{x+y}{x-y}$ даёт горизонтальные касательные на $y = -x$ и вертикальные на $y = x$. На $x = 0$ наклон равен -1, угол равен $-\frac{\pi}{4}$ по модулю π. Эти значения исправляют описки в исходном разборе. Ни одна неравновесная траектория фокуса не замкнута.

Центр: чисто мнимые корни

При $\alpha = 0$ предыдущая система даёт $r' = 0$, $\theta' = \beta$. В канонических координатах траектории — окружности; в исходных — эллипсы. Период каждого непостоянного решения линейной системы равен $\frac{2\pi}{|\beta|}$.

Пример: $\dot x = -y$, $\dot y = x$, откуда $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ и $x^2 + y^2 = C > 0$. Стрелки против часовой стрелки. Норма решения постоянна, поэтому ноль устойчив; ненулевое решение к нему не приближается, поэтому асимптотической устойчивости нет. Полная окружность — фазовая траектория системы, а не один глобальный график $y(x)$ исходного дробного уравнения.

Быстрая классификация через след и определитель

Положим $\tau = \operatorname{tr} A = a + d$, $\Delta = \det A$, $\mathcal{D} = \tau^2 - 4\Delta$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

- $\Delta < 0$: седло.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} > 0$: узел; знак τ задаёт устойчивость.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} = 0$: повторный узел; проверить, равна ли A скалярной матрице.
- $\Delta > 0$, $\mathcal{D} < 0$, $\tau \neq 0$: фокус; знак τ задаёт устойчивость.
- $\Delta > 0$, $\tau = 0$: центр, поскольку $\mathcal{D} < 0$.

Если $\Delta = 0$, начало не является изолированным равновесием линейной системы: $\ker A$ содержит прямую. Такой случай находится вне сформулированной классификации. Нельзя механически назвать его узлом по одному ненулевому корню.

Ответ у доски и проверка себя

План ответа: перейти от дробного уравнения к системе, назвать условие $\det A \neq 0$, сформулировать пять пунктов классификации с разбиением повторного узла на два типа, для каждого дать каноническую систему, уравнение или параметризацию кривых и стрелки.

Устойчивость выбирать по знаку вещественных частей, а не по слову «узел».

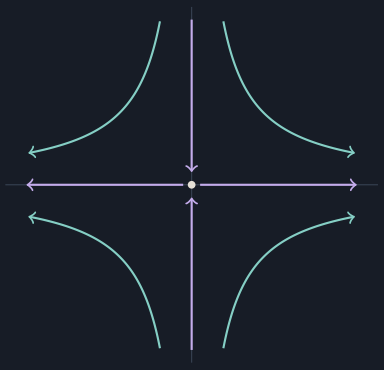
1. Классифицируйте $\dot{x} = 3x$, $\dot{y} = 2x + y$. *Ответ:* неустойчивый узел, корни 3 и 1; собственные направления $y = x$ и $x = 0$.
2. Для $\dot{x} = a(x + y)$, $\dot{y} = ay$ возможно ли седло? *Ответ:* нет. При $a \neq 0$ повторный корень a и вырожденный узел; при $a = 0$ каждая точка равновесна.
3. Классифицируйте $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Ответ:* устойчивый фокус, вращение против часовой стрелки.
4. У A корни 0 и -4. Применима ли теорема об изолированной особой точке? *Ответ:* нет; имеется прямая равновесий. Нулевое решение может быть устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

Частые ошибки

У фокуса нет циклов; у линейного центра нет притяжения. При повторном корне нужно проверить собственные векторы. Формулу логарифмической спирали следует писать в канонических координатах, а не для произвольной исходной матрицы. Собственные прямые и вертикальные траектории нельзя терять при делении. Наконец, линейная классификация сама по себе не доказывает наличие центра у нелинейной системы.

Фазовые портреты в одном развороте

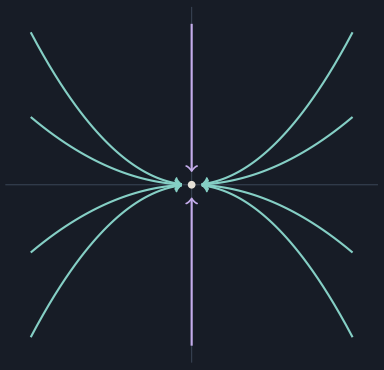
Это точные траектории выбранных модельных систем. Стрелки показывают рост времени. Линейная невырожденная замена координат может изменить углы и форму рисунка, сохранив тип движения.



Седло

$x' = x,\ y' = -y.$

Собственные числа 1 и -1. Вне осей $xy = C$. По вертикальной оси решения входят в нуль, по горизонтальной выходят. Оси являются сепаратрисами. Нуль неустойчив.



Устойчивый узел с разными корнями

$x' = -x,\ y' = -2y.$

На каждой полуплоскости $y = Cx^2$. Типичные траектории подходят к нулю касательно медленному направлению x. Вертикальная ось — отдельная прямая траектория. Все решения затухают.

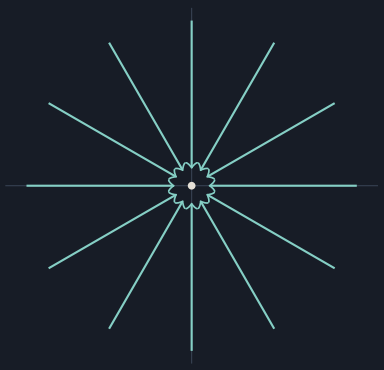


Центр

$x' = -y,\ y' = x.$

$x^2 + y^2 = C$, движение против часовой стрелки. Нуль устойчив, но не притягивает соседние ненулевые решения. Здесь замкнутые траектории не изолированы среди замкнутых траекторий, поэтому это не предельные циклы.

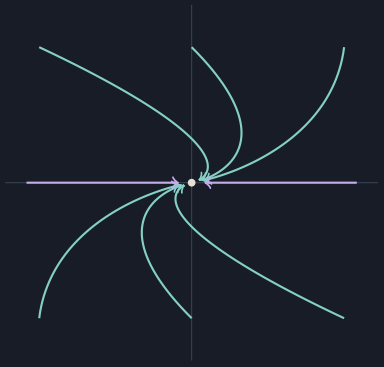
Повторный узел и фокус



Звёздный устойчивый узел

$x' = -x,\ y' = -y.$

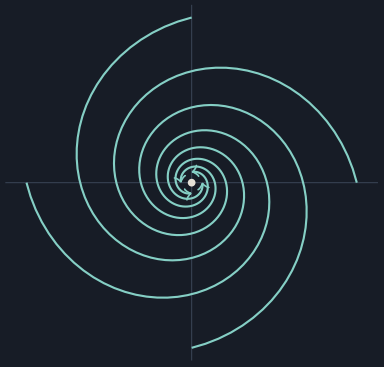
Матрица $-E$, два независимых собственных вектора. Каждое направление инвариантно: ненулевые траектории — лучи, направленные к нулю. Повторный корень сам по себе не означает жорданову клетку.



Неправильный устойчивый узел

$x' = -x + y,\ y' = -y.$

$x = e^{-t}(C_1 + C_2 t),\ y = C_2 e^{-t}$. Одна жорданова клетка размера 2. Кривые подходят к оси собственного вектора $(1, 0)^T$; они не являются набором прямых лучей.



Устойчивый фокус

$x' = -\frac{1}{4}x - y,\ y' = x - \frac{1}{4}y.$

$r' = -\frac{1}{4}r,\ \theta' = 1$. Радиус убывает, угол неограниченно растёт. Траектория спиральная и не замкнута; фиксированного предельного направления к нулю нет.

Для получения неустойчивого узла или фокуса можно изменить знак всего векторного поля: геометрические кривые сохранятся, а все стрелки времени обратятся. Для седла обращение времени меняет входящие и выходящие сепаратрисы местами.

БИЛЕТ 27

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость

Источники: сборник, с. 123-125; фотографии тетради, вопрос 25

Объём ответа: Точные определения и исследования непосредственно по ним

Доработка по фотографиям: вопрос 25

IMG_2020–IMG_2023; главы 27.

Что требуется. Кванторы, асимптотическая устойчивость, неустойчивость и примеры; дописать сведение к нулю.

Для фиксированного t_0 устойчивость φ означает: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что все решения с $\|u(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$ существуют при всех $t \geq t_0$ и остаются на расстоянии меньше ε. При неавтономном уравнении δ может зависеть от t_0; равномерная устойчивость требует отдельного условия. В формуле неустойчивости на IMG_2021 сравнивать надо $u(t_1)$ с $\varphi(t_1)$, а не с $\varphi(t_0)$.

Дописанное сведение IMG_2023: положим $z = u - \varphi(t)$. Тогда

$$z' = F(t, z + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)) =: G(t, z), \quad G(t, 0) = 0.$$

Начальные отклонения и отклонения в каждый момент в точности равны z, поэтому устойчивость исходного решения эквивалентна устойчивости нуля новой системы.

Для $z' = az$ имеем $|z(t)| = |z_0|e^{a(t-t_0)}$. При $a \leq 0$ берём $\delta = \varepsilon$; при $a < 0$ есть также притяжение к нулю. При $a > 0$ фиксируем $\varepsilon_0 = 1$ и для любого δ выбираем $0 < z_0 < \min(\delta, 1)$: в момент $t = t_0 + a^{-1}\ln(1/z_0)$ отклонение равно 1, значит ноль неустойчив.

Понять смысл

Устойчивость — свойство реакции на малую ошибку в начальном состоянии. Сравнивают два решения *в один и тот же момент времени*. Вопрос состоит не в том, остаётся ли само выбранное решение маленьким или ограниченным, а в том, остаётся ли малым расстояние до него при достаточно малом начальном отклонении.

Устойчивость и притяжение различны. Устойчивость запрещает большое удаление в будущем; притяжение требует, чтобы расстояние в итоге стремилось к нулю. Асимптотическая устойчивость объединяет оба требования. На рисунке это две разные проверки: не выйти из заранее заданной трубки вокруг решения и со временем приблизиться к её центральной линии.

Точные определения и порядок кванторов

Пусть рассматривается $\dot{u} = f(t, u)$ и решение $\varphi(t)$, определённое для всех $t \geq t_0$. Предполагаем локальное существование и единственность в окрестности его графика; например, f непрерывна и локально липшицева по u. Фиксируем норму в $\mathbb{R}^n$.

Решение φ *устойчиво по Ляпунову при начальном моменте* t_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что для любого начального вектора u_0 с

$$\|u_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$$

соответствующее решение существует при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет

$$\|u(t; t_0, u_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon \qquad \text{для всех } t \geq t_0.$$

Если область задачи ограничена, начальные данные выбираются в ней. Достаточно проверять все достаточно малые ε: для больших работает тот же меньший радиус. Выбранное δ должно подходить *сразу всем* допустимым начальным отклонениям и *всем* будущим моментам. Зависимость от будущего t недопустима.

Решение *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и существует $\rho > 0$, такое, что при $\|u_0 - \varphi(t_0)\| < \rho$ выполняется

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t; t_0, u_0) - \varphi(t)\| = 0.$$

Радиус притяжения ρ не обязан совпадать с $\delta(\varepsilon, t_0)$. В общем определении не требуется, чтобы скорость сходимости была одинаковой для всех начальных данных.

Если δ можно выбирать независимо от t_0 для всех допустимых начальных моментов, устойчивость называется *равномерной*. Для базового билета достаточно обычной устойчивости; нельзя незаметно подменять её более сильным равномерным свойством. Выбор другой нормы в конечномерном пространстве не меняет устойчивость: любые две нормы ограничивают друг друга постоянными множителями, которые поглощаются выбором δ.

Как доказывать неустойчивость

Нужно обратить кванторы: найти *один* радиус $\varepsilon_0 > 0$, для которого сколь угодно малое начальное отклонение способно выйти из ε_0-трубки. То есть для каждого $\delta > 0$ выбирают начальные данные с отклонением меньше δ и момент $t \geq t_0$, в котором расстояние не меньше ε_0. Достаточно одного такого семейства возмущений; не требуется, чтобы удалялись все соседние решения.

При включённом в определение требовании существования на всей полуоси конечный обрыв близких решений тоже нарушает устойчивость. Но надёжнее предъявить выход на фиксированное расстояние до этого обрыва. Фраза «экспонента растёт» должна завершаться выбором возмущения и момента выхода, иначе связь с определением остаётся нераскрытой.

Пример 1: устойчивое неограниченное решение

Рассмотрим одномерную систему

$$\dot{u} = 1 + t - u, \qquad \varphi(t) = t, \qquad t \geq 0.$$

Общее решение $u = t + Ce^{-t}$; действительно, $\dot{u} = 1 - Ce^{-t} = 1 + t - u$. Начальное отклонение равно $|C|$, а в момент t

$$|u(t) - \varphi(t)| = |C|e^{-t} \le |C|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta = \varepsilon$. Если $|u(0) - \varphi(0)| < \delta$, то отклонение меньше ε при всех $t \ge 0$. Все решения существуют на всей полуоси. Кроме того, $|C|e^{-t} \to 0$ для любого C, поэтому решение асимптотически устойчиво. При этом сама $\varphi(t) = t$ неограниченна. Так видно, почему устойчивость нельзя определять как ограниченность решения.

Пример 2: устойчивость без притяжения

Для $\dot{u} = 0$ решения постоянны: $u(t) = u_0$. Относительно любого $\varphi(t) = c$ расстояние равно $|u_0 - c|$. Выбор $\delta = \varepsilon$ доказывает устойчивость. Если $u_0 \neq c$, расстояние положительно и не стремится к нулю, поэтому асимптотической устойчивости нет. Для линейного центра на плоскости действует та же идея: расстояние до нуля постоянно в подходящей норме.

Пример 3: неустойчивость с явными кванторами

Для $\dot{u} = u$ нулевое решение неустойчиво. Возьмём $t_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 1$. Для произвольного $\delta > 0$ положим $u_0 = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) > 0$. Тогда $u_0 < \delta$, но при

$$t_* = \ln \frac{1}{u_0} \ge 0$$

получаем $u(t_*) = u_0 e^{t_*} = 1$. Следовательно, никакой начальный радиус не удерживает все возмущения внутри единичной трубки. Этот расчёт — полноценное доказательство от определения.

Пример 4: устойчивое и неустойчивое решения одного уравнения

Рассмотрим

$$\dot{u} = 1 - u^2.$$

Равновесия $u = 1$ и $u = -1$ существуют на всей прямой. Между ними правая часть положительна, вне отрезка $[-1, 1]$ — отрицательна.

Устойчивость $u = 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ берём $\delta = \min(\varepsilon, \frac{1}{2})$. Если $u_0 \in (1 - \delta, 1)$, решение возрастает и не может пересечь равновесие 1 по единственности. Если $u_0 \in (1, 1 + \delta)$, оно убывает и также не пересекает 1. Значит, оно всё время остаётся между u_0 и 1, так что $|u(t) - 1| \le |u_0 - 1| < \varepsilon$. Траектория находится в компактном отрезке, где поле гладко; теорема продолжения обеспечивает существование на всей правой полуоси.

Решение монотонно и ограниченно, поэтому имеет предел ℓ. Этот предел обязан быть равновесием: иначе производная вблизи него сохраняла бы ненулевой знак и модуль, несовместимые со сходимостью. В рассматриваемой окрестности единственное равновесие — 1, значит $u(t) \to 1$. Таким образом, $u = 1$ асимптотически устойчиво. Его действительная область притяжения шире выбранной окрестности, но для определения это не нужно.

Неустойчивость $u = -1$. Зафиксируем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Для любого $\delta > 0$ выберем $\eta = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4})$ и $u_0 = -1 + \eta$. Решение лежит в $(-1, 1)$ и имеет вид

$$u(t) = \tanh(t + \operatorname{artanh} u_0).$$

В момент $t_* = -\operatorname{artanh} u_0 > 0$ оно достигает нуля. Начальное расстояние до -1 равно $\eta < \delta$, а конечное равно единице. Следовательно, равновесие -1 неустойчиво. Для этого вывода не нужны ни вторая производная, ни подробное исследование выпуклости графиков.

Ответ у доски

Сначала произнести порядок «для любого ε найдётся δ, для всех близких начальных данных, для всех будущих времён». Добавить существование решений на полуоси. Для асимптотической устойчивости отдельно назвать устойчивость и притяжение. Показать оценку отклонения на линейном примере, затем уравнение $\dot{u} = 1 - u^2$ и оба равновесия. Неустойчивость подтвердить фиксированным ε_0.

Проверка себя

1. Устойчиво ли решение $u = 0$ уравнения $\dot{u} = -2u$? *Ответ:* асимптотически устойчиво; $|u(t)| = |u_0|e^{-2t}$, $\delta = \varepsilon$ при $t_0 = 0$.
2. Доказывает ли $u(t) \to 0$ для одного начального состояния устойчивость нуля? *Ответ:* нет; определение относится ко всем достаточно близким начальным данным.
3. Исследуйте $\dot{u} = (4 - t^2)u$ при $t_0 = 0$. *Ответ:* $u = u_0 e^{4t - \frac{t^3}{3}}$; максимум показателя на $[0, \infty)$ равен $\frac{16}{3}$ при $t = 2$. Берём $\delta = \varepsilon e^{-\frac{16}{3}}$; затем $u(t) \to 0$. Ноль асимптотически устойчив, несмотря на начальный рост.
4. Для $\dot{u} = 1 - u^2$ решение начинается ниже -1. Что происходит? *Ответ:* оно убывает и за конечное время уходит к $-\infty$; это не влияет на локальную устойчивость $+1$, но даёт ещё один способ увидеть неустойчивость -1.

Частые ошибки

Не менять местами ε и δ. Не выбирать δ в зависимости от будущего времени. Не объявлять решение устойчивым только потому, что оно само существует долго или ограниченно. Не заменять доказательство рисунком. В нелинейном уравнении разные решения могут иметь разную устойчивость; для линейной системы действует специальное утверждение следующего билета.

БИЛЕТ 28

Устойчивость линейных систем и спектральный критерий

Источники: сборник, с. 126-128; фотографии тетради, вопрос 26

Объём ответа: Полное доказательство сведения ЛНС к ЛОС и всех направлений спектрального критерия

Доработка по фотографиям: вопрос 26

IMG_2024–IMG_2027; главы 28.

Что требуется. Сведение ЛНС к ЛОС; спектральный критерий; обязательно дописать достаточность, оборванную на фото.

Если φ решает $u' = A(t)u + f(t)$, разность $z = u - \varphi$ решает $z' = A(t)z$. Поэтому устойчивость каждого решения ЛНС равносильна устойчивости нулевого решения ЛОС. Нелинейный пример с одновременно устойчивым и неустойчивым равновесиями нельзя переносить на одну линейную систему.

Для постоянной A положим $s = t - t_0 \geq 0$ и запишем $z = e^{As}z_0$. В жордановой клетке $J = \lambda E + N$, $N^k = 0$:

$$e^{Js} = e^{\lambda s}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{s^r N^r}{r!}.$$

Если все $\operatorname{Re}\lambda < 0$, каждое слагаемое стремится к нулю и ограничено. После перехода обратно к исходному базису найдётся $M \geq 1$ с $\|e^{As}\| \leq M$. Выбираем $\delta = \varepsilon/M$: это устойчивость. Стремление матрицы к нулю даёт притяжение всех малых начальных отклонений, то есть асимптотическую устойчивость.

Если все вещественные части неположительны, а все клетки на мнимой оси имеют размер один, соответствующие экспоненты ограничены, отрицательные блоки затухают. Та же оценка с M доказывает устойчивость. При наличии собственного значения на мнимой оси притяжения всех отклонений нет.

Полный критерий: положительная вещественная часть даёт растущую экспоненту; клетка размера хотя бы два на мнимой оси даёт растущий полиномиальный множитель. В обоих случаях сколь угодно малые начальные данные вдоль растущей моды выходят из фиксированной окрестности. Для комплексных мод берём действительную или мнимую часть. Требование тетради — доказать достаточность; необходимость оставлена здесь как объяснение полного критерия.

Понять смысл

В линейной неоднородной системе внешнее воздействие одинаково для сравниваемых решений. При вычитании оно исчезает, поэтому рост ошибки определяется только однородной

системой. Отсюда важный вывод: у одной линейной системы нельзя получить одно устойчивое и другое неустойчивое решение при одинаковом начальном моменте и одном понятии устойчивости.

Для постоянной матрицы вопрос сводится к росту e^{At}. Экспонента с отрицательной вещественной частью затухает даже после умножения на любой многочлен. На мнимой оси экспонента сама не растёт, но присоединённые векторы добавляют степени t и могут разрушить устойчивость. Поэтому одних знаков вещественных частей недостаточно: в граничном случае нужна жорданова структура.

Связь ЛНС и ЛОС: формулировка

Пусть $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t \geq t_0$. Рассмотрим

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \qquad \dot{v} = A(t)v.$$

Линейные решения определены на всей правой полуоси. Любое решение φ ЛНС устойчиво тогда и только тогда, когда нулевое решение ЛОС устойчиво. То же верно для асимптотической устойчивости. Здесь устойчивость понимается относительно возмущений начального состояния, а не относительно произвольных изменений функции f.

Доказательство сведения к разности

Для любого решения u ЛНС положим $v = u - \varphi$. Тогда

$$\dot{v} = \dot{u} - \dot{\varphi} = (A(t)u + f(t)) - (A(t)\varphi + f(t)) = A(t)v.$$

Обратно, любое решение v ЛОС даёт решение $u = \varphi + v$ ЛНС. Это взаимно однозначное соответствие, причём

$$v(t_0) = u(t_0) - \varphi(t_0), \qquad \|v(t)\| = \|u(t) - \varphi(t)\|.$$

Следовательно, условие «начальное отклонение меньше δ, будущее отклонение меньше ε» буквально совпадает для двух задач. Совпадает и условие $\|v(t)\| \to 0$. Устойчивость, а затем устойчивость вместе с притяжением переносятся в обе стороны с теми же радиусами. Доказательство не требует постоянства A и не требует ограниченности f.

Точная спектральная теорема

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ постоянна. Тогда нулевое решение $\dot{u} = Au$:

1. асимптотически устойчиво *тогда и только тогда*, когда все собственные значения удовлетворяют $\operatorname{Re}\lambda < 0$;
2. устойчиво *тогда и только тогда*, когда $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ для всех λ, а все собственные значения на мнимой оси полупросты, то есть их жордановы клетки имеют размер один;
3. неустойчиво, если существует корень с положительной вещественной частью либо имеется клетка размера не меньше двух для корня с нулевой вещественной частью.

Устойчивость *без* асимптотической устойчивости означает второй случай и дополнительное наличие хотя бы одного корня на мнимой оси. Если таких корней нет, второй критерий также выполнен, но система асимптотически устойчива.

Лемма: устойчивость равносильна ограниченности оператора перехода

Пишем $s = t - t_0 \geq 0$ и $u(t) = T(s)u_0$, где $T(s) = e^{As}$. Если $\|T(s)\| \leq M$ при всех $s \geq 0$, то выбор $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ даёт

$$\|u(t)\| \leq M\|u_0\| < \varepsilon.$$

Обратно, пусть ноль устойчив. Для $\varepsilon = 1$ найдём $\delta > 0$. Для каждого единичного вектора z начальное состояние $(\frac{\delta}{2})z$ даёт $\|T(s)(\frac{\delta z}{2})\| < 1$. Следовательно, $\|T(s)z\| < \frac{2}{\delta}$ для всех s и всех единичных z, то есть $\sup_{s\geq 0}\|T(s)\| \leq \frac{2}{\delta}$. Это и есть необходимая ограниченность.

Асимптотическая устойчивость дополнительно требует $T(s)z \to 0$ для каждого достаточно малого z. По линейности это эквивалентно сходимости для *всех* z. В конечной размерности достаточно проверить базисные векторы, и тогда все столбцы $T(s)$ стремятся к нулю, а значит $\|T(s)\| \to 0$. В обратную сторону сходимость $T(s) \to 0$ и непрерывность на конечных промежутках дают ограниченность, а потому и устойчивость вместе с притяжением.

Доказательство спектрального критерия

Перейдём к комплексной жордановой форме $A = SJS^{-1}$. Обратимая постоянная замена меняет нормы лишь на постоянные множители, поэтому ограниченность и стремление к нулю не изменяются. Работа над $\mathbb{C}$ не создаёт ложного вывода для вещественной системы: если все вещественные решения ограниченны или стремятся к нулю, то это верно и для комплексных, поскольку каждое из них есть сумма вещественного и i-кратного вещественного решения.

Для клетки $J_k = \lambda E + N$, $N^k = 0$, имеем

$$e^{J_k s} = e^{\lambda s}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{s^j}{j!}N^j.$$

Рассмотрим все возможности.

Отрицательная вещественная часть. Если $\operatorname{Re}\lambda = -a < 0$, каждый элемент блока — сумма членов $s^j e^{-as}$ с постоянными комплексными множителями. Они стремятся к нулю и ограниченны при $s \geq 0$. Даже нетривиальная жорданова клетка здесь не мешает устойчивости. Если все корни таковы, вся матрица e^{As} стремится к нулю; по лемме ноль асимптотически устойчив. Более того, выбрав $0 < \gamma < \min(-\operatorname{Re}\lambda)$, можно оценить все конечные полиномиальные множители и получить

$$\|e^{As}\| \leq Me^{-\gamma s}.$$

Это объясняет экспоненциальное затухание ошибок, хотя в начале возможен временный рост.

Нулевая вещественная часть, клетки размера один. Блок равен $e^{i\beta s}$ и имеет модуль один. Если все остальные блоки затухают, вся фундаментальная матрица остаётся ограниченной:

ноль устойчив. Но ненулевой собственный вектор соответствующего корня даёт незатухающую моду. Поэтому асимптотической устойчивости нет. Нулевой корень $\lambda = 0$ входит сюда наравне с ненулевыми чисто мнимыми корнями.

Положительная вещественная часть. Для собственного вектора $h \neq 0$ решение $e^{\lambda s}h$ имеет норму $e^{\operatorname{Re}\lambda s}\|h\|$, неограниченную при $s \to \infty$. Следовательно, оператор перехода неограничен и по лемме ноль неустойчив. Масштабирование начального вектора делает его сколь угодно малым, но не устраняет последующий рост.

Нулевая вещественная часть, нетривиальная клетка. Возьмём последнее звено цепочки длины $k \geq 2$. Соответствующее решение имеет вид

$$e^{i\beta s}\left(h_k + sh_{k-1} + \cdots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}h_1\right).$$

Полиномиальный вектор неограничен: после деления на s^{k-1} он стремится к ненулевому $\frac{h_1}{(k-1)!}$. Множитель $e^{i\beta s}$ нормы не меняет. Поэтому снова нарушена ограниченность оператора перехода, и ноль неустойчив.

Перечень исчерпывает все жордановы клетки. Он доказывает достаточность устойчивого случая и необходимость его условий, а также оба направления критерия асимптотической устойчивости. Недостаточно было бы доказать только «отрицательные корни дают затухание».

Примеры, которые различают похожие случаи

Для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ оба корня нулевые, но $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решение с начальным значением $(0, \eta)$ равно $(\eta t, \eta)$ и выходит из любой фиксированной окрестности. Ноль неустойчив.

Для $A = \operatorname{diag}(0, -1)$ решения имеют вид (C_1, C_2e^{-t}) и ограниченны. Ноль устойчив, но обычно предел равен $(C_1, 0)$, поэтому притяжения к нулю нет. Повторный нулевой корень у $A = 0$ также не мешает устойчивости: важна полупростота, а не простота корня.

Наконец, у $A = \begin{pmatrix} -1 & K \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$e^{At} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & Kt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При большом K отклонение может сначала существенно вырасти, но матрица всё же ограниченна и стремится к нулю. Устойчивость не требует монотонного убывания евклидовой нормы. Для ЛНС с любой непрерывной правой частью и этой матрицей все решения асимптотически устойчивы относительно начальных ошибок, даже если само решение растёт из-за воздействия.

Ответ у доски

Начать с $v = u - \varphi$ и точно перенести оба определения. Затем сформулировать спектральный критерий, включая клетки на мнимой оси. Обосновать связь устойчивости с ограниченностью e^{At}. Разобрать четыре типа блоков и объяснить, почему список даёт не только достаточность, но и необходимость. Отдельно назвать условие «устойчиво, но не асимптотически».

Проверка себя

1. У A один блок размера три с корнем -2. Что с устойчивостью? *Ответ:* асимптотическая устойчивость; $t^2 e^{-2t} \to 0$.
2. Спектр состоит из -1, 0, 0, нулевые блоки одномерны. *Ответ:* устойчивость без асимптотической устойчивости.
3. Возможны ли одновременно устойчивое и неустойчивое решения у $\dot{u} = Au + e^{t^2} b$? *Ответ:* нет; устойчивость всех решений одинакова и определяется ЛОС, хотя воздействие быстро растёт.
4. Для каких a ноль системы с $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ устойчив? *Ответ:* только при $a < 0$, и тогда асимптотически. При $a = 0$ мешает клетка размера два.

Частые ошибки

Корни на мнимой оси должны быть полупростыми, но могут быть кратными. Для отрицательных вещественных частей размеры клеток не ограничиваются. Положительность хотя бы одной вещественной части достаточна для неустойчивости. Воздействие ЛНС не влияет на устойчивость по начальным данным, но влияет на само движение. Утверждение о постоянном спектре не переносится без отдельного обоснования на произвольную переменную матрицу $A(t)$.

БИЛЕТ 29

Устойчивость по первому приближению

Источники: сборник, с. 129; соответствующая часть лекций недоступна

Объём ответа: Формулировка теоремы и полные применения; доказательство самой теоремы не требуется

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Рядом с равновесием гладкое поле раскладывается на линейную часть и остаток меньшего порядка. Если линейная часть уверенно сжимает все направления, малый нелинейный остаток не отменяет локальное притяжение. Если существует уверенно растущее направление, нелинейность меньшего порядка не устраняет неустойчивость. На границе, когда линейная часть не растёт и не затухает в каком-то направлении, именно отброшенный остаток может решить всё.

Поэтому метод первого приближения силён в некритических случаях и намеренно даёт неполный ответ в критических. Фраза «по линейной системе центр, следовательно, и по нелинейной центр» не является допустимым применением теоремы. Устойчивость и геометрический тип также нужно различать: данный билет прежде всего отвечает на вопрос об устойчивости.

Точная формулировка: автономный случай

Пусть $\dot{u} = F(u)$, где $F \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ в открытой окрестности равновесия a, $F(a) = 0$. После замены $v = u - a$ имеем

$$\dot{v} = Av + R(v), \qquad A = DF(a), \qquad \frac{\|R(v)\|}{\|v\|} \longrightarrow 0 \quad (v \to 0).$$

Линейная система $\dot{v} = Av$ называется системой первого приближения.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

1. Если все собственные значения A имеют строго отрицательные вещественные части, равновесие a нелинейной системы локально асимптотически устойчиво.
2. Если хотя бы одно собственное значение A имеет строго положительную вещественную часть, равновесие a неустойчиво.
3. Если положительных вещественных частей нет, но хотя бы одна равна нулю, эти два пункта не дают заключения. Требуется исследовать нелинейные члены или применять другой метод.

В пункте 2 остальные корни могут иметь любые вещественные части, в том числе нулевые. В пункте 1 допускаются кратные корни и любые жордановы клетки. Утверждение локальное: отрицательные корни в одной точке не означают притяжения всех решений из всей области.

Вариант с явно зависящим от времени остатком

В сборнике записана также система

$$\dot{v} = Av + R(t, v), \qquad t \geq t_0,$$

с постоянной A. Для применения аналогичного результата нужно, чтобы $R(t, 0) = 0$, выполнялись условия локального существования и единственности, а малость остатка была *равномерной по времени*. Удобная достаточная запись:

$$\|R(t, v)\| \leq \omega(\|v\|)\|v\|, \qquad \omega(r) \longrightarrow 0 \quad (r \downarrow 0),$$

для всех $t \geq t_0$ и всех достаточно малых v. Функция ω не зависит от t. Можно предполагать непрерывность R и его частных производных по v в такой трубке. При этих гипотезах действуют те же строгие спектральные выводы. Для обычных автономных задач равномерность обеспечивается отсутствием времени в остатке.

Это условие нельзя заменять только поточечной малостью $R(t, v) = o(\|v\|)$ при каждом фиксированном t. Дополнительный проверочный пример:

$$\dot{u} = -u + e^t u^2, \qquad t \geq 0.$$

Линейная часть равна $-u$, но коэффициент квадратичного остатка неограниченно растёт. Для $u_0 > 0$ подстановка $w = \frac{1}{u}$ даёт $w' = w - e^t$, откуда

$$u(t) = \frac{e^{-t}}{u_0^{-1} - t}, \qquad 0 \leq t < u_0^{-1}.$$

Сколь угодно малое положительное начальное состояние в итоге выходит из фиксированной окрестности и имеет конечный взрыв. Таким образом, ноль неустойчив; противоречия с теоремой нет, поскольку равномерная малость нарушена. Этот пример служит пояснением условий, а не обязательным доказательством билета.

Алгоритм применения

1. Решить $F(a) = 0$ и убедиться, что выбранная точка действительно равновесная. Названная в условии точка может требовать проверки.
2. Проверить гладкость поля в её окрестности. Корни, модули и знаменатели требуют отдельного внимания к области определения.
3. Выписать матрицу Якоби $DF(u)$ и подставить именно равновесие a.
4. При необходимости явно сделать сдвиг $v = u - a$; линейное приближение записывается относительно нулевого отклонения, а не относительно старых координат.
5. Вычислить спектр и выбрать допустимый вывод. Если случай критический, так и сказать, не подменяя отсутствие заключения утверждением об устойчивости.

В размерности два отрицательность вещественных частей эквивалентна условиям $\operatorname{tr} A < 0$ и $\det A > 0$. Неустойчивость следует, например, при $\det A < 0$, поскольку тогда корни вещественны и разных знаков. Для вывода именно о седле или фокусе используют локальную классификационную теорему следующего билета, а не только теорему об устойчивости.

Пример из сборника с проверкой знака

Рассмотрим

$$\dot{x} = \sin x, \qquad \dot{y} = \cos y.$$

Все равновесия имеют вид

$$x = k\pi, \qquad y = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Матрица Якоби равна

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

В точке $(0, \frac{\pi}{2})$ она равна $\operatorname{diag}(1, -1)$. Есть положительный корень, следовательно, равновесие неустойчиво.

Проверим сдвиг подробно: $\xi = x$, $\eta = y - \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\dot{\xi} = \sin \xi = \xi + O(\xi^3), \qquad \dot{\eta} = \cos(\frac{\pi}{2} + \eta) = -\sin \eta = -\eta + O(\eta^3).$$

Линейная часть второго уравнения имеет *минус*; запись $\dot{y} = y - \frac{\pi}{2}$ была бы ошибочной. Остаток имеет норму $O(\|(\xi, \eta)\|^3) = o(\|(\xi, \eta)\|)$, поэтому условия выполнены.

В точке $(\pi, \frac{\pi}{2})$ матрица равна $\operatorname{diag}(-1, -1)$, и равновесие локально асимптотически устойчиво. В общей точке спектр равен $((-1)^k, -(-1)^m)$. Асимптотическая устойчивость имеет место, когда k нечётно и m чётно; во всех остальных комбинациях есть положительный корень и равновесие неустойчиво. Так одна формула Якоби исследует целое семейство точек.

Почему критический случай действительно неопределён

У трёх уравнений

$$\dot{u} = -u^3, \qquad \dot{u} = u^3, \qquad \dot{u} = 0$$

одинаковая линейная часть $A = 0$. В первом случае

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 2u_0^2 t}}$$

существует на полуоси, удовлетворяет $|u(t)| \le |u_0|$ и стремится к нулю: ноль асимптотически устойчив. Во втором случае модуль любого ненулевого малого решения растёт, а формула имеет знаменатель $\sqrt{1 - 2u_0^2 t}$: ноль неустойчив. В третьем случае ноль устойчив без притяжения. Один и тот же спектр даёт три разных ответа из-за нелинейных членов.

Аналогично при чисто мнимых корнях на плоскости к вращению можно добавить радиальные члены с $r' = -r^3$ или $r' = r^3$. Получатся притягивающие либо отталкивающие спирали с одной и той же линейной частью центра. Это подготавливает осторожное применение теоремы Пуанкаре-Перрона.

Ответ у доски

Записать $F(a) = 0$, сдвиг и $A = DF(a)$. Сформулировать два строгих спектральных пункта и критическую оговорку. Указать, что остаток имеет меньший порядок; при зависимости от времени — равномерно. Разобрать пример $\sin x, \cos y$, не потеряв минус после сдвига. Само доказательство теоремы в охват этого билета не включено; вычисление линейной части и проверка условий должны быть полными.

Проверка себя

1. Исследуйте ноль системы $\dot{x} = -x + y^2$, $\dot{y} = -2y + x^3$. *Ответ:* $A = \mathrm{diag}(-1, -2)$, ноль локально асимптотически устойчив.
2. Что даёт первое приближение для $\dot{u} = -u^3$? *Ответ:* ничего; $A = 0$. Асимптотическая устойчивость доказывается отдельно по явному решению.
3. Исследуйте $\dot{x} = x - x^3$, $\dot{y} = -y$. *Ответ:* равновесия $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$. В нуле спектр $(1, -1)$, неустойчивость; в двух остальных точках $(-2, -1)$, асимптотическая устойчивость.
4. Достаточно ли $\det DF(a) > 0$ для устойчивости? *Ответ:* нет; например, $A = E$ имеет положительный определитель, но равновесие неустойчиво.

Частые ошибки

Не исследовать произвольную точку как равновесие без подстановки. Не считать, что «малый остаток» означает малость только при одном времени. Не приписывать теореме заключение для нулевых вещественных частей. Не путать локальную асимптотическую устойчивость с глобальным притяжением. Наличие одного отрицательного корня не компенсирует положительный корень в другом направлении.

БИЛЕТ 30

Исключительные направления, Пуанкаре-Перрон и Лотка-Вольтерра

Источники: сборник, с. 130-133; соответствующая часть лекций недоступна

Объём ответа: Определения, безопасная формулировка и применение теоремы; полный разбор модели

Статус в новом комплекте

На новых фотографиях отдельного вопроса по этой теме нет. Глава сохранена из прежнего курса как дополнение; это не подтверждение нового экзаменационного требования.

Понять смысл

Линейная классификация объясняет, какие рисунки возникают из экспонент и жордановых цепочек. Теперь нужны два перехода: описать тип особой точки геометрически и выяснить, когда линейный рисунок действительно отражает нелинейную систему. Модель хищника и жертвы показывает границу метода: в точке сосуществования линейная часть имеет центр, но замкнутость настоящих траекторий нужно обосновать отдельно.

Основной план ответа: дать корректное определение направления подхода, перечислить типы, сформулировать локальную теорему с условиями, исследовать два равновесия модели и построить положительные траектории. Не стоит пытаться получить весь портрет только по собственным значениям одной точки.

Особая точка и исключительное направление

Для $\dot{z} = F(z)$ на плоскости точка a особая, если $F(a) = 0$. Она изолирована, если в некоторой её окрестности других равновесий нет. Предполагаем достаточную гладкость для локальной единственности.

Единичное направление e называется *исключительным направлением подхода к* a, если существует непостоянная траектория $z(t)$ и соответствующий конец времени, такие, что

$$z(t) \longrightarrow a, \qquad \frac{z(t) - a}{\|z(t) - a\|} \longrightarrow e.$$

Для гладкой системы, если траектория подходит к внутреннему равновесию, этот конец времени бесконечен: $t \to +\infty$ для входящих и $t \to -\infty$ для выходящих ветвей. Часто противоположные лучи e и $-e$ объединяют в одно *неориентированное направление*; нужно явно сказать, что именно считается.

Определение через $\frac{y}{x} \to \tan\theta$ недостаточно: оно исключает вертикальные направления, не требует самого приближения к точке и фиксирует лишь одну половину времени.

Нормированный вектор устраняет все три проблемы. Для типичных гладких узлов и сепаратрис предельный луч совпадает с касательным направлением кривой у равновесия.

Геометрические типы

- *Узел*: все достаточно близкие непостоянные траектории подходят к точке в одном направлении времени и имеют предельные направления. У обычного линейного узла с различными корнями есть две собственные прямые: почти все траектории касаются медленного собственного направления, а две ветви сильного направления выделены. У вырожденного узла одна собственная прямая, по которой касаются все подходящие ветви. У дикритического узла возможны все направления. Поэтому описание обычного узла нельзя выдавать за определение всех узлов.
- *Седло*: локально имеются две входящие и две выходящие сепаратрисные ветви; их предельные направления задаются двумя различными касательными прямыми. Прочие близкие траектории проходят через седловые секторы и не стремятся к точке, оставаясь всё время в малой окрестности. У глобальной системы две локальные ветви могут соединиться вдали, поэтому подсчитывают именно локальные ветви.
- *Фокус*: соседние траектории спирально подходят к точке или удаляются от неё, совершая бесконечно много оборотов. Нормированное направление не имеет предела, исключительных направлений нет. Устойчивый фокус притягивает при $t \to +\infty$, неустойчивый — при обратном времени.
- *Центр*: достаточно малая проколотая окрестность заполнена замкнутыми траекториями, окружающими точку. Отдельная траектория не подходит к равновесию, поэтому исключительных направлений нет. Отсутствие направлений само по себе не отличает центр от фокуса: нужно установить замкнутость или спиральное приближение.

Цикл — любая непостоянная периодическая орбита; *предельный цикл* дополнительно изолирован среди циклов. Семейство окружностей вокруг центра не состоит из предельных циклов.

Теорема Пуанкаре-Перрона: условия и границы

Рассмотрим в окрестности нуля

$$\dot{z} = Az + R(z), \qquad R(0) = 0, \quad DR(0) = 0.$$

Ниже используется достаточно сильная гладкая версия: поле принадлежит C^2 в окрестности нуля, поэтому $R(z) = O(\|z\|^2)$. Это проверенная достаточная формулировка для применения, а не заявление о дословном тексте отсутствующей лекции.

Если оба собственных значения A имеют ненулевые вещественные части, равновесие гиперболично. Локальная качественная классификация по линейной части сохраняется:

1. два вещественных корня разных знаков дают нелинейное седло; сепаратрисы касаются собственных направлений матрицы A;
2. два вещественных корня одного знака дают узловое поведение: при отрицательном знаке равновесие притягивает, при положительном отталкивает;

3. комплексные корни с ненулевой вещественной частью дают фокус с соответствующей устойчивостью.

Речь идёт о локальном качественном поведении, а не о буквальном совпадении кривых. Нелинейные сепаратрисы обычно не прямые, и формулы линейных траекторий не становятся точными решениями нелинейной системы.

Для различных вещественных корней и комплексной пары основные выводы применяются уже при более слабой регулярности. Однако одно условие $R = o(\|z\|)$ без уточнения гладкости не следует использовать для безоговорочного переноса всей тонкой геометрии повторного узла. Безопасно отдельно применять теорему первого приближения к устойчивости, а повторный геометрический случай рассматривать в рамках явно названных достаточных условий. Все конкретные применения ниже имеют полиномиальные правые части и этим требованиям удовлетворяют.

Если есть нулевая вещественная часть, теорема в указанном виде не даёт классификации. Чисто мнимая пара может сопровождаться центром либо устойчивым или неустойчивым слабым фокусом; эти примеры не исчерпывают всех возможных вырожденных ситуаций. Нулевой корень также требует самостоятельного анализа. Доказательство теоремы Пуанкаре-Перрона в охват этого билета не включено.

Пример применения

Для системы

$$\dot{x} = -x + y^2, \qquad \dot{y} = x - 2y + x^3$$

ноль — равновесие, поле полиномиально, а

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad R(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = O(x^2 + y^2).$$

Корни -1 и -2 различны и отрицательны: ноль — устойчивый узел, в частности локально асимптотически устойчив. Собственное направление для медленного корня -1 задаётся $y = x$, для -2 — $x = 0$. Нелинейная сильная входящая кривая касается второго направления, а остальные достаточно близкие входящие траектории касаются первого. Это касательные у равновесия; утверждать, что обе прямые целиком инвариантны, нельзя без подстановки в нелинейное поле.

Модель Лотки-Вольтерры: постановка

Пусть x — численность жертв, y — численность хищников. Классическая модель

$$\dot{x} = \alpha x - \gamma xy, \qquad \dot{y} = -\beta y + \delta xy, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

описывает рост жертв без хищников, их убыль при встречах, вымирание хищников без пищи и рост хищников при наличии жертв. Рассмотрим требуемый частный случай всех параметров, равных единице:

$$\dot{x} = x(1 - y), \qquad \dot{y} = y(x - 1).$$

Биологическая область — $x, y \geq 0$; для первого интеграла ниже понадобится строгая положительность.

Положительный квадрант инвариантен. На любом промежутке существования

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} (1 - y(s))\, ds\right), \quad y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} (x(s) - 1)\, ds\right),$$

поэтому положительные начальные значения не меняют знак. Оси тоже инвариантны и должны исследоваться отдельно от логарифмического первого интеграла.

Равновесия и линеаризация

Из $x(1 - y) = 0$, $y(x - 1) = 0$ получаем только $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Матрица Якоби:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}.$$

В нуле она равна $\operatorname{diag}(1, -1)$: это седло. На положительной полуоси x имеем $x' = x$, движение от начала; на положительной полуоси y имеем $y' = -y$, движение к началу. В полной плоскости это части четырёх сепаратрисных ветвей, а в биологическом квадранте видны две.

В точке $(1, 1)$ положим $\xi = x - 1$, $\eta = y - 1$. Тогда

$$\dot{\xi} = -\eta - \xi\eta, \qquad \dot{\eta} = \xi + \xi\eta, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни $\pm i$ дают линейный центр, но это критический случай. Теорема Пуанкаре-Перрона ещё не доказывает центр исходной системы.

Дополнительный строгий вывод: первый интеграл

Следующее доказательство замкнутости дополняет краткое рассуждение о симметрии в сборнике; оно не приписывается отсутствующей лекции. В положительном квадранте положим

$$H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y.$$

По правилу цепочки

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) x(1 - y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) y(x - 1) \\ &= (x - 1)(1 - y) + (y - 1)(x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому каждая положительная траектория лежит на уровне $H = h$. Функция $q(s) = s - \ln s$ имеет единственный минимум $q(1) = 1$, строго убывает до 1 и возрастает после 1; при $s \to 0+$ и $s \to \infty$ она стремится к бесконечности. Отсюда:

- $H \geq 2$, причём $H = 2$ только в $(1, 1)$;
- каждый подуровень $H \leq h$ компактен и отделён от осей;
- при $h > 2$ градиент $\nabla H = (1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y})$ нигде на уровне не равен нулю.

Остаётся обосновать, что уровень — одна замкнутая кривая, а не просто ограниченное множество. Гессиан H равен diag$(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2})$ и положительно определён, поэтому H строго выпукла. На каждом луче из $(1,1)$, пока он остаётся в положительном квадранте, функция строго возрастает после начального минимума и стремится к бесконечности у конца луча или на бесконечности. Каждый такой луч пересекает $H = h > 2$ ровно один раз. Регулярность уровня и этот радиальный параметр показывают, что он является гладким простым замкнутым овалом вокруг $(1,1)$.

На овале поле не обращается в ноль, поскольку единственное положительное равновесие имеет $H = 2$. Оно касается овала вследствие $\dot{H} = 0$. Скорость непрерывна и на компактном овале ограничена снизу положительным числом. Следовательно, движение обходит весь овал за конечное время: период можно записать как

$$T(h) = \oint_{H=h} \frac{ds}{\|F(x,y)\|},$$

где ds — элемент длины дуги. Интеграл конечен; после возвращения к начальной точке единственность даёт периодичность. Компактность уровня одновременно исключает конечный взрыв и гарантирует продолжение движения в обе стороны на всю прямую. Так доказано: каждая положительная неравновесная траектория — периодический овал, а $(1,1)$ — центр.

Как нарисовать портрет без догадок

Нулевые изоклины — $x = 1$ для $\dot{y} = 0$ и $y = 1$ для $\dot{x} = 0$, а также оси. В четырёх областях положительного квадранта:

- $x > 1$, $y < 1$: движение вправо и вверх;
- $x > 1$, $y > 1$: влево и вверх;
- $x < 1$, $y > 1$: влево и вниз;
- $x < 1$, $y < 1$: вправо и вниз.

Получается обход против часовой стрелки. Например, в точке $(1,2)$ поле равно $(-1,0)$, движение влево; в $(2,1)$ оно равно $(0,1)$, движение вверх. Рисуют седло в начале, стрелки на осях, центр $(1,1)$ и несколько вложенных овалов $H = h$. Овалы не обязаны быть эллипсами; периоды нелинейных колебаний также не обязаны равняться 2π для всех уровней. Число 2π относится к малым колебаниям линейной части.

Ответ у доски

Определить направление нормированным вектором и разрешить оба бесконечных конца времени. Различить обычный, вырожденный и дикритический узлы. Сформулировать локальную теорему с гиперболичностью и условиями гладкости. Для Лотки-Вольтерры найти обе точки, построить Якоби, назвать седло и объяснить критичность $(1,1)$. Затем вычислить $\dot{H} = 0$, описать компактные регулярные уровни и стрелки. Последний шаг даёт центр строго, независимо от неполного аргумента симметрии.

Проверка себя

1. Сколько исключительных лучей у линейного седла? *Ответ:* четыре, образующие две неориентированные собственные прямые; две ветви входящие, две выходящие.
2. Почему у устойчивого фокуса нет исключительного направления, хотя траектории стремятся к нулю? *Ответ:* их нормированные радиус-векторы продолжают вращаться и не имеют предела.
3. Может ли положительное решение единичной модели Лотки-Вольтерры стремиться к $(1, 1)$, если начинается в другой точке? *Ответ:* нет. Его значение $H > 2$ постоянно, тогда как в $(1, 1)$ оно равно 2.
4. Найдите первый интеграл общей модели. *Ответ:* $H = \delta x - \beta \ln x + \gamma y - \alpha \ln y$; дифференцирование даёт ноль. Точка сосуществования $(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma})$.

Частые ошибки

Не определять направление одним отношением $\frac{y}{x}$. Не описывать все узлы только рисунком с двумя разными корнями. Не называть каждый цикл предельным. Не делать вывод о нелинейном центре из чисто мнимых корней. Не применять H на осях: там логарифмы не определены. Симметрия портрета полезна для проверки рисунка, но сама по себе без дополнительного аргумента не заменяет доказательство, что все положительные траектории замкнуты.

Вычислительная база

Эта часть нужна, когда решение остановилось на производной, интеграле или преобразовании. Разбирай ровно тот инструмент, который мешает текущей задаче, и сразу возвращайся к ней. После чтения выполняй короткую проверку без примера перед глазами.

Производные и правила вычисления

Производная отвечает на вопрос «как меняется функция». Интеграл ищет функцию по известной производной. Производная константы равна нулю; при неопределённом интегрировании константа появляется.

Таблица производных

Функция	Производная по x
C	0
x^n	nx^{n-1}
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$e^u u'$
a^u	$a^u \ln(a)\, u'; \quad a > 0,\ a \neq 1$
$\ln \lvert u \rvert$	$\frac{u'}{u}; \quad u \neq 0$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Степенные формулы применяются там, где функции определены и дифференцируемы. Для

вещественных дробных степеней обязательно проверь область. Для формулы производной $\sqrt{u}$ требуется $u > 0$, для $\arcsin u$ и $\arccos u$ — $|u| < 1$; точки нулевых знаменателей проверяются отдельно.

Правила вычисления производных

Три правила которые чаще всего нужны

$$
\begin{aligned}
(u+v)' &= u' + v', \\
(uv)' &= u'v + uv', \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}.
\end{aligned}
$$

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Сложная функция: сначала производная внешней функции, потом умножение на производную внутренней. Не выбирай между ними: нужны обе.

$$
\begin{aligned}
(y^3)' &= 3y^2 y', \\
(\sin y)' &= \cos y \cdot y', \\
(e^y)' &= e^y y'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(xy)' &= y + xy', \\
(xy')' &= y' + xy'', \\
\left(\frac{y'}{y}\right)' &= \frac{yy'' - (y')^2}{y^2}.
\end{aligned}
$$

Если произвольная константа стала функцией

При вариации постоянной $C = C(x)$. Её производная уже не равна нулю.

$$y = C(x)e^{-P} \quad \Longrightarrow \quad y' = C'e^{-P} - CP'e^{-P}.$$

В этой записи $P = P(x)$. Сначала правило произведения, затем правило сложной функции для e^{-P}. Если $y = xv$, то $y' = v + xv'$, а не xv'.

Проверка на 10 секунд: дифференцируй найденную первообразную. Должно получиться ровно подынтегральное выражение, вместе с коэффициентом и знаком.

Интегралы и замена переменной

Во всей таблице $a > 0$. К каждому неопределённому интегралу добавляется $+C$. Обозначения arctg и arctan означают одну и ту же функцию.

Интеграл	Первообразная без константы
$\int u^n\,du, \quad n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\int \dfrac{du}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\int e^u\,du$	e^u
$\int a^u\,du$	$\dfrac{a^u}{\ln a}; \quad a>0,\ a\neq 1$
$\int \sin u\,du$	$-\cos u$
$\int \cos u\,du$	$\sin u$
$\int \dfrac{du}{\cos^2 u}$	$\operatorname{tg} u$
$\int \dfrac{du}{\sin^2 u}$	$-\operatorname{ctg} u$
$\int \dfrac{du}{u^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right)$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right), \quad \lvert u\rvert < a$
$\int \dfrac{du}{a^2-u^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+u}{a-u}\right\rvert$
$\int \dfrac{du}{u^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$	$\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+a^2}\right\rvert$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$	$\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert, \quad \lvert u\rvert > a$

Не путай три признака: квадрат без корня с плюсом $\to$ arctg; корень из $a^2-u^2 \to$ arcsin; корень из $u^2 \pm a^2 \to$ логарифм. В формулах для arctg и arcsin разные множители.

Замена переменной и интегрирование по частям

Замена переменной механически

1. Назови $u = g(x)$.
2. Вычисли $du = g'(x)\,dx$.
3. Замени и выражение, и дифференциал.
4. Проинтегрируй по u.
5. Верни $g(x)$.

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx: \quad u = 1+x^2, \quad du = 2x\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \ln(1+x^2) + C.$$
$$\int \cos(3x)\,dx: \quad u = 3x, \quad dx = \frac{du}{3}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\sin(3x) + C.$$

Нельзя написать $u = y^3$ и оставить dy как будто ничего не изменилось: $du = 3y^2\,dy$. Если интегрируешь по x, то $(y^3)' = 3y^2 y'$, и здесь y' обязательно.

Интегрирование по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Выбери u так, чтобы его производная упростилась; v найди интегрированием dv.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C.$$

Для $\int \ln x\,dx$: $u = \ln x$, $dv = dx$; тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$, ответ $x\ln x - x + C$ $(x > 0)$.

Логарифмы и рациональные дроби

Как обращаться с константами и модулями

$$\begin{aligned} \ln|y| = G(x) + C_1 \quad &\Longrightarrow \quad |y| = e^{C_1}e^{G} \\ &\Longrightarrow \quad y = Ce^{G}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Знак выбран на рассматриваемом интервале. Если $y = 0$ тоже решает исходное уравнение, добавь его: тогда можно разрешить $C = 0$. Нельзя получать нулевое решение только «из экспоненты».

$$2\ln|x| = \ln(x^2),$$

$$\ln|A| - \ln|B| = \ln\left|\frac{A}{B}\right|.$$

Переобозначение $C_1 \to C$ допустимо, если сохраняется множество возможных значений: $2C_1$ можно назвать C, а e^{C_1} сначала только положительная константа. Из $\sqrt{x^2}$ получается $|x|$, не автоматически x.

Дробь со знаменателем второй степени

Для $Q(x) = Ax^2 + Bx + D$ сначала вычисли $\Delta = B^2 - 4AD$. Если степень числителя не меньше степени знаменателя, сначала выполни деление многочленов.

При $\Delta > 0$ найди корни a, b: $Q = A(x-a)(x-b)$. Затем запиши сумму простых дробей, а коэффициенты найди умножением на общий знаменатель.

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{L}{x-a} + \frac{M}{x-b}.$$

$$1 = L(x-b) + M(x-a),$$

$$x = a \Longrightarrow L = \frac{1}{a-b},$$

$$x = b \Longrightarrow M = \frac{1}{b-a}.$$

При $\Delta = 0$ нужны степени повторного множителя: $\dfrac{L}{x-a} + \dfrac{M}{(x-a)^2}$. При $\Delta < 0$ выдели полный квадрат; над неприводимым квадратным множителем в разложении ставится линейный числитель $Lx + M$.

Корни и выделение полного квадрата

Пример с нужными корнями и знаками

$$Q = 1 + x - x^2,$$
$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
$$Q = (x-a)(b-x), \qquad b - a = \sqrt{5}.$$
$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}\right].$$

Проверка: после сложения дробей числитель равен $(b-x)+(x-a) = b-a = \sqrt{5}$. Во втором интеграле внутренняя производная $b-x$ равна -1.

$$\int \frac{dx}{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\ln|x-a| - \ln|b-x|\right] + C.$$

Полный квадрат без угадывания

$$x^2 + Bx + D = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 + D - \frac{B^2}{4}.$$

$$x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 9.$$

Замена $u = x + 2$ даёт $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$. Если после выделения квадрата стоит минус, формула будет логарифмической, а не arctg.

Для числителя $mx + n$ над Q: представь $mx + n = \lambda Q' + \mu$. Первый интеграл равен $\lambda \ln|Q|$; остаток решай по корням или полному квадрату.

Тригонометрия без угадывания

В линейных ОДУ синус и косинус появляются парами. Дифференцирование переводит их друг в друга; именно поэтому правой части с одним синусом часто соответствует пробное решение с обоими слагаемыми.

$$(\sin \beta x)' = \beta \cos \beta x, \qquad (\cos \beta x)' = -\beta \sin \beta x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Отсюда, например,

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Если нужно представить линейную комбинацию одной гармоникой, используй

$$A \cos \beta x + B \sin \beta x = R \cos(\beta x - \varphi),$$

где $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = R\cos\varphi$, $B = R\sin\varphi$. При $R = 0$ функция нулевая; делить на R тогда нельзя. Для выбора четверти угла нельзя ограничиваться только $\tan\varphi = \frac{B}{A}$.

Проверка по производной

Пусть $y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$. Сначала произведение, потом производные тригонометрических функций:

$$y' = e^{ax}\left[(aA + bB)\cos bx + (aB - bA)\sin bx\right].$$

Эта формула особенно полезна при начальных условиях: $y(0) = A$, $y'(0) = aA + bB$. В ней не нужно угадывать фазовый сдвиг.

Три задания на контроль

Найди $\int \cos^2(2x)\,dx$; вычисли производную $e^{-x}\sin 2x$; найди A, B, если $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответы: $\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$; $e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$; $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$.

Простые дроби от записи до интеграла

Рациональная функция — отношение многочленов. Её интеграл ищут по устройству знаменателя. Сначала отделяют целую часть, затем раскладывают правильную дробь.

Алгоритм

1. Если степень числителя не меньше степени знаменателя, раздели многочлены с остатком.
2. Разложи знаменатель над $\mathbb{R}$ на линейные множители и неприводимые квадратичные.
3. Для каждого линейного множителя $(x-a)^m$ выпиши все дроби $\frac{A_j}{(x-a)^j}$, $j = 1, \dots, m$.
4. Для каждого неприводимого квадратичного множителя $q(x)^m$ выпиши все дроби $\frac{B_j x + C_j}{q(x)^j}$.
5. Умножь на общий знаменатель. Сравни коэффициенты или подставь удобные значения x. После решения проверь тождество.

Показательный пример с повторным корнем:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

После умножения:

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx.$$

При $x = 0$ получаем $A = 1$, при $x = 1$ — $D = 1$; по коэффициенту при x^2: $A + B = 0$, поэтому $B = -1$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Ответ действует на интервалах, не содержащих 0 и 1. Производная последнего слагаемого положительна: $\left(-\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Числитель похож на производную знаменателя

Иногда полное разложение не нужно. Для $\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$ представим числитель как $(2x+2)+1$, а знаменатель как $(x+1)^2+4$:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

В логарифме модуль необязателен, потому что знаменатель положителен на всей $\mathbb{R}$. У арктангенса появился множитель $\frac{1}{2}$, а не 2.

Комплексные числа и характеристические корни

Комплексное число $z = a + ib$ имеет вещественную часть a, мнимую часть b, $i^2 = -1$. Сопряжённое число $\bar{z} = a - ib$. Если многочлен имеет действительные коэффициенты, вместе с невещественным корнем $a + ib$ у него есть корень $a - ib$ той же кратности.

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с вещественными колебаниями:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Поэтому сопряжённая пара корней $a \pm ib$, $b > 0$, порождает две действительные функции

$$e^{ax}\cos bx, \qquad e^{ax}\sin bx.$$

При кратности m добавляются множители $1, x, \dots, x^{m-1}$ к каждой функции. Получается $2m$ действительных функций, а не m.

Как разложить характеристический многочлен

Для квадратного многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$ вычисляй $\Delta = p^2 - 4q$. При $\Delta < 0$:

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Пример: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ даёт $-1 \pm 2i$, поэтому

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Для старших степеней ищи общий множитель, группировку, квадрат суммы или рациональный корень. После найденного корня r раздели на $\lambda - r$; не удаляй кратность.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Соответствующее решение:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-x}.$$

Количество независимых произвольных постоянных должно совпадать с порядком однородного уравнения. Это необходимая контрольная проверка, но само по себе совпадение числа постоянных ещё не доказывает правильность ответа.

Матрицы определители и собственные векторы

В системе $u' = Au$ состояние u — столбец. Умножение матрицы на столбец берёт скалярное произведение каждой строки с этим столбцом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ cu_1 + du_2 \end{pmatrix}.$$

У матриц порядок важен: обычно $AB \neq BA$. Для 2×2

$$\det A = ad - bc, \qquad \operatorname{tr} A = a + d,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Обратная матрица нужна для $C' = X^{-1} f$. Если определитель равен нулю, формулу обратной применять нельзя.

Собственное число λ определяется уравнением $\det(A - \lambda E) = 0$. Затем собственный вектор $v \neq 0$ находится из $(A - \lambda E)v = 0$. Определитель здесь даёт число; в уравнении для вектора стоит сама матрица.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Для $\lambda = 3$: $2v_1 - 2v_2 = 0$, можно взять $v = (1, 1)^T$. Для $\lambda = 1$: $v_1 = 0$, можно взять $v = (0, 1)^T$. Тогда

$$u = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оба собственных числа положительны: нулевое решение неустойчиво. Геометрический тип — узел. Эти выводы не заменяют проверку собственных векторов прямым умножением $Av = \lambda v$.

При повторном корне не всегда хватает собственных векторов. Для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

можно выбрать цепочку $v_1 = (1, 0)^T$, $v_2 = (0, 1)^T$: $(A - E)v_1 = 0$, $(A - E)v_2 = v_1$. Решения цепочки равны $e^t v_1$ и $e^t(tv_1 + v_2)$. Подробный вывод дан в билете 23.

Практический справочник методов

Здесь 12 типов первого порядка и 5 приёмов понижения порядка из семинаров (PDF с. 3-70). Это практическая опора, а не 17 дополнительных билетов; примеры проверены.

Сначала выбери метод и область. Перед делением проверь нулевые случаи. Выпиши производную замены, верни переменные и проверь ответ.

1. Разделяющиеся переменные

Первые два типа

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y' = f(x)g(y)$, то есть правая часть раскладывается в произведение функции только от x и функции только от y.

ХОД РЕШЕНИЯ

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Порядок действий: найди нули $g(y)$; постоянные решения $y \equiv y_0$ при $g(y_0) = 0$ проверь отдельно. На остальных ветвях раздели переменные и интегрируй. Не требуется любой ценой выражать y явно: корректное неявное равенство тоже может быть ответом.

ПРИМЕР

Пример: $y' = 2x(1 + y^2)$. Нулей $1 + y^2$ в действительных числах нет.

$$\frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x^2 + C$$
$$\Longrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x^2 + C).$$

Область выбирается между соседними полюсами тангенса. В примере $y' = xy$ сначала отдельно $y = 0$, затем $\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + C$, откуда $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$, уже с $C_1 \in \mathbb{R}$.

ПРОВЕРЬ

Начальное условие удобно подставлять до выражения y: если $\operatorname{arctg} y = x^2 + C$ и $y(0) = 1$, то $C = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Замена линейного выражения

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y' = f(ax + by + c)$. Одно и то же выражение $ax + by + c$ целиком сидит внутри функции.

ХОД РЕШЕНИЯ

$$z = ax + by + c; \qquad z' = a + by' = a + b\,f(z).$$

При $b \neq 0$ получилось уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}z}{a + b\,f(z)} = \mathrm{d}x; \qquad y = \frac{z - ax - c}{b}.$$

До деления проверь корни $a + b\,f(z) = 0$: постоянное $z = z_0$ даёт прямую $y = \dfrac{z_0 - ax - c}{b}$. При $b = 0$ исходное уравнение просто интегрируется по x, такая обратная замена не нужна.

ПРИМЕР

Пример: $y' = (x + y)^2$. Возьми $z = x + y$; тогда $z' = 1 + y' = 1 + z^2$.

$$\frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arctg} z = x + C$$
$$\Longrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x + C) - x.$$

ПРОВЕРЬ

Если $y(x_0) = y_0$, то $z(x_0) = ax_0 + by_0 + c$. Начальное значение z не равно y_0 автоматически.

БЫСТРАЯ РАЗВИЛКА

Если справа произведение $f(x)g(y)$, пробуй тип 1. Если справа функция одного линейного выражения, пробуй тип 2. Замена не закончена, пока рядом не записаны z' и формула возврата к y.

3. Однородное первого порядка

Однородность первого порядка и сдвиг

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ при $x \neq 0$. Эквивалентный ориентир: числитель и знаменатель справа однородны по x, y одинаковой степени. Это не то же самое, что линейное однородное уравнение типа 5.

ХОД РЕШЕНИЯ

$$v = \frac{y}{x}; \qquad y = xv; \qquad y' = v + xv'.$$

$$v + xv' = F(v) \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v) - v.$$

Сначала проверь $F(v) - v = 0$: каждый допустимый корень v_0 даёт прямую $y = v_0 x$. Для остальных ветвей раздели:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{F(v) - v} = \ln|x| + C; \qquad v = \frac{y}{x}.$$

ПРИМЕР

Пример: $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$. Тогда $xv' = v^2$. Отдельно $y = 0$; при $v \neq 0$:

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + C \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

ПРОВЕРЬ

Начальное условие: $v(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$. Работай на интервале, который не пересекает $x = 0$ и нули знаменателей.

Если возникает $\sqrt{y^2 - x^2}$, после $y = xv$ получаем $|x|\sqrt{v^2 - 1}$. Сначала зафиксируй знак x на интервале. Удалять $|x|$ без условия $x > 0$ нельзя.

4. Отношение линейных выражений

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y' = F\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Сначала проверь знаменатель и вычисли $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$.

ХОД РЕШЕНИЯ

Если $\Delta \neq 0$, найди точку пересечения двух прямых:

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0; \qquad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

Сдвинь начало: $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. Так как $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, свободные члены исчезнут. Затем положи $Y = vX$, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = v + Xv'$ и решай как тип 3. Верни Y, X, потом y, x.

ПРИМЕР

Пример: $y' = \dfrac{x + y + 1}{x - y + 3}$. Система даёт $x_0 = -2, y_0 = 1$. Тогда $X = x + 2, Y = y - 1$, и $Y' = \dfrac{X + Y}{X - Y}$. Далее $v = \dfrac{Y}{X}$, $v + Xv' = \dfrac{1 + v}{1 - v}$.

ПРОВЕРЬ

Если $\Delta = 0$ и градиенты ненулевые, прямые параллельны или совпадают. Возьми общий линейный аргумент $z = ax + by$. Обе формы выражаются через z и константы, поэтому $y' = \Phi(z)$, $z' = a + b\Phi(z)$: это тип 2. При $b = 0$ справа функция только x. Если одна форма постоянна, разбери её прямо; делить на нулевой знаменатель нельзя.

Сдвиг и $v = \dfrac{Y}{X}$ временно исключают $X = 0$. Это ограничение замены, не обязательно запрет исходной задачи: возможность продолжения проверяется в исходном уравнении.

5. Линейное уравнение

Линейное уравнение и Бернулли

КАК УЗНАТЬ

Нормальная форма: $y' + P(x)y = Q(x)$. Коэффициент при y' сначала сделай равным 1, указав, где разрешено деление. Неизвестная y и её производная входят в первой степени, без произведения yy'.

ХОД РЕШЕНИЯ

Однородное линейное: $Q = 0$. Обозначь $A(x) = \int P(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда $y = Ce^{-A}$.

Неоднородное: $Q \neq 0$. Замени C на функцию и продифференцируй произведение:

$$\begin{gathered} y = C(x)e^{-A}; \qquad y' = C'e^{-A} - CPe^{-A}. \\ y' + Py = C'e^{-A} = Q \quad \Longrightarrow \quad C' = Qe^{A} \\ \Longrightarrow \quad C = \int Qe^{A}\,\mathrm{d}x + C_1. \\ y = e^{-A}\left[\int Qe^{A}\,\mathrm{d}x + C_1\right]. \end{gathered}$$

Та же техника через множитель $\mu = e^{A}$: умножь уравнение на μ, тогда $(\mu y)' = \mu Q$. Не надо запоминать обе формулы отдельно: достаточно уметь узнавать производную произведения.

ПРИМЕР

Пример: $y' - 2y = x$. Тогда $\mu = e^{-2x}$, $(ye^{-2x})' = xe^{-2x}$. По частям $\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$.

Ответ $y = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

ПРОВЕРЬ

Иногда линейным становится $x = x(y)$: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + P(y)x = Q(y)$. Тогда независимая переменная y, а штрих по x использовать нельзя.

Пример: $y' = \frac{1}{x+y} \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + y \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x = y$. Получаем $x = Ce^{y} - y - 1$. Обращение допустимо на участке, где $y' \neq 0$ и исходное уравнение определено; исходные условия проверяй после возврата.

6. Уравнение Бернулли

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, $n \neq 0, 1$. При $n = 0$ или 1 это уже линейное уравнение.

ХОД РЕШЕНИЯ

На ветви $y \neq 0$ умножь на y^{-n} и введи $z = y^{1-n}$. Производную выпиши обязательно:

$$z' = (1-n)y^{-n}y'.$$
$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q.$$

Реши линейное уравнение для z. Верни y из $z = y^{1-n}$, проверив знак, диапазон z и все вещественные ветви: например, $z = y^2$ даёт $y = \pm\sqrt{z}$ при $z > 0$. Решение $y = 0$ проверь отдельно: оно может быть допустимо или вообще не принадлежать области исходной степени.

ПРИМЕР

Пример: $y' + y = y^2$. Здесь $n = 2$, $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Получаем $z' - z = -1$, откуда $z = 1 + Ce^x$. Ответ $y = \frac{1}{1 + Ce^x}$, отдельно $y = 0$. Если $y(0) = 2$, сначала $z(0) = \frac{1}{2}$, затем $C = -\frac{1}{2}$.

ПРОВЕРЬ

Два частых сбоя: забыть множитель $1 - n$ и вернуть $y = z$ вместо обратной степени.

7. Замены приводящие к линейному

Линеаризующая замена и полный дифференциал

КАК УЗНАТЬ

Признак: рядом стоят $h'(y)y'$ и $h(y)$, либо их легко получить одним умножением. Если уравнение имеет вид $h'(y)y' + P(x)h(y) = Q(x)$, то $z = h(y)$ делает его линейным: $z' + Pz = Q$.

ХОД РЕШЕНИЯ

$$\begin{aligned} z = \sin y \quad &\Longrightarrow \quad z' = \cos y \cdot y'; \\ z = e^y \quad &\Longrightarrow \quad z' = e^y y'; \\ z = y^3 \quad &\Longrightarrow \quad z' = 3y^2 y'. \end{aligned}$$

ПРИМЕР

Пример: $\cos y \cdot y' + \sin y = x$. Тогда $z = \sin y$, $z' + z = x$. Множитель e^x:

$$\begin{aligned} (ze^x)' = xe^x \quad &\Longrightarrow \quad ze^x = e^x(x-1) + C \\ &\Longrightarrow \quad \sin y = x - 1 + Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Не обязательно выражать y через arcsin. Если выражаешь, помни про несколько ветвей: $\sin y = z$ не означает единственное $y = \arcsin z$. Для вещественного ответа нужно $|z| \le 1$; около $\cos y = 0$ отдельно проверяется гладкость и исходное уравнение.

Ещё один образец: $y' + a(x) = b(x)e^{-y}$. Умножь на e^y: $e^y y' + a(x)e^y = b(x)$. Тогда $z = e^y$ и $z' + az = b$, но после решения допустимо только $z > 0$, $y = \ln z$.

ПРОВЕРЬ

Начальные условия: $z(x_0) = h(y_0)$. Обратная замена должна уважать область функции h и, при необходимости, выбранную начальным условием ветвь.

8. Уравнение в полных дифференциалах

КАК УЗНАТЬ

Форма: $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$. Ищи функцию Φ с $\Phi_x = M$, $\Phi_y = N$. Тогда $\mathrm{d}\Phi = 0$ и ответ $\Phi(x,y) = C$.

При непрерывных первых частных производных проверка $M_y = N_x$ даёт локальную точность; на односвязной области она достаточна и для единого потенциала во всей области.

ХОД РЕШЕНИЯ

1. Найди M_y и N_x, сравни. 2. Проинтегрируй M по x, считая y константой. 3. Добавь $g(y)$, а не просто C. 4. Продифференцируй результат по y и приравняй N.

$$\Phi = \int M\,\mathrm{d}x + g(y);$$
$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,\mathrm{d}x\right).$$

Если справа ещё остался x, проверь вычисления или условие точности. Можно симметрично начать с $\int N\,\mathrm{d}y + h(x)$.

ПРИМЕР

Пример: $(2xy+1)\,\mathrm{d}x + (x^2+2y)\,\mathrm{d}y = 0$. Здесь $M_y = 2x = N_x$.

$$\Phi = x^2y + x + g(y); \qquad \Phi_y = x^2 + g'(y) = x^2 + 2y.$$
$$g' = 2y \quad\Longrightarrow\quad g = y^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2y + x + y^2 = C.$$

ПРОВЕРЬ

Если равенства частных нет, этот метод напрямую не применим. Иногда помогает интегрирующий множитель: если $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ зависит только от x, то $\mu(x) = \exp\left(\int \dfrac{M_y - N_x}{N}\,\mathrm{d}x\right)$. Если $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ зависит только от y, аналогично $\mu(y)$. После умножения точность проверь заново, исключённые делением случаи отдельно.

9. Уравнение Клеро

Клеро и Лагранж

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y = xy' + f(y')$. Введи $p = y'$ и получи $y = xp + f(p)$. Дифференцируй по x, используя правило произведения:

ХОД РЕШЕНИЯ

$$p = p + xp' + f'(p)p' \quad \Longrightarrow \quad [x + f'(p)]p' = 0.$$

Первая ветвь $p' = 0$: $p = C$, поэтому семейство прямых $y = Cx + f(C)$.

Вторая ветвь $x + f'(p) = 0$: параметрически $x = -f'(p)$, $y = f(p) - pf'(p)$. Это кандидат на особое решение (огибающую); проверь, задаёт ли он гладкий график и удовлетворяет ли исходному уравнению.

ПРИМЕР

Пример: $y = xy' + (y')^2$. Общее семейство $y = Cx + C^2$. Особая ветвь $x = -2p$, $y = -p^2$, то есть $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

Проверка особой ветви: $y' = -\dfrac{x}{2}$; $xy' + (y')^2 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{4} = -\dfrac{x^2}{4}$. Не забудь: $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}$, а не $\dfrac{x^2}{2}$.

ПРОВЕРЬ

Ветви могут касаться; вопрос допустимых склеек решается проверкой гладкости и исходного уравнения. Формула «общее семейство» сама по себе не исключает особые решения.

10. Уравнение Лагранжа

КАК УЗНАТЬ

Признак: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Положи $p = y'$. Клеро соответствует особому случаю $\varphi(p) = p$; его лучше сразу решать как тип 9.

ХОД РЕШЕНИЯ

Дифференцируй $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ по x:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Сначала проверь постоянные $p = p_0$: если $p_0 = \varphi(p_0)$, получаем прямые $y = p_0 x + \psi(p_0)$. Они теряются при делении на $p - \varphi(p)$.

На регулярной ветви перейди к $x = x(p)$, не к $y = y(p)$ как самостоятельной неизвестной:

$$[p - \varphi(p)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = x\varphi'(p) + \psi'(p).$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Это линейное уравнение для x при независимой переменной p. Реши его с константой, затем запиши параметрический ответ $x = x(p)$, $y = x(p)\varphi(p) + \psi(p)$. Убирать параметр не обязательно.

ПРИМЕР

Пример: $y = 2xy' + (y')^2$. Здесь $\varphi = 2p$, $\psi = p^2$; постоянная ветвь $p = 0$ даёт $y = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -2; \qquad (p^2 x)'_p = -2p^2.$$
$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}; \qquad y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}, \qquad p \neq 0.$$

ПРОВЕРЬ

Здесь $(\ )'_p$ означает производную по p. Локальный график $y(x)$ проверяй на участках, где параметризация допускает его; не забывай константу C при интегрировании.

11. Уравнение вида x равен функции производной

Форма: $x = f(y')$. Положи $p = y'$. Тогда $x = f(p)$, $\mathrm{d}x = f'(p)\,\mathrm{d}p$, а $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$.

$$x = f(p); \quad y = \int p f'(p)\,\mathrm{d}p + C.$$

Это полноценный параметрический ответ. Если удобно, интеграл можно взять по частям: $y = pf(p) - \int f(p)\,\mathrm{d}p + C$.

Пример: $x = (y')^2 + 1$. Тогда $x = p^2 + 1$, $\mathrm{d}x = 2p\,\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}y = 2p^2\,\mathrm{d}p$.

$$x = p^2 + 1; \quad y = \frac{2p^3}{3} + C.$$

На регулярных ветвях $p > 0$ или $p < 0$ можно выразить $p = \pm\sqrt{x-1}$, $x > 1$. Получится $y = \pm\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$. Проверка: $y' = p$, затем $x = p^2 + 1$.

Начальное условие $y(x_0) = y_0$: сначала реши $f(p_0) = x_0$, затем

$$C = y_0 - \left(\int p f'(p)\,\mathrm{d}p\right)\Big|_{p=p_0}.$$

Может быть несколько p_0 и несколько ветвей. Если дополнительно задан $y'(x_0)$, он выбирает p_0.

Постоянное p обычно не даёт решения на интервале x: равенство $x = f(p_0)$ фиксирует одну точку x. При $f'(p) = 0$ параметризация вырождается; сам по себе этот факт не создаёт новое решение. Конечные точки и возможность продолжения проверяй отдельно.

12. Уравнение вида y равен функции производной

Форма: $y = f(y')$. Снова $p = y'$, но теперь $y = f(p)$, $\mathrm{d}y = f'(p)\,\mathrm{d}p$. Из $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$ при $p \neq 0$:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,\mathrm{d}p + C; \quad y = f(p).$$

Поскольку делили на p, обязательно проверь $p = 0$: постоянная функция $y \equiv f(0)$ решает исходное уравнение, если $f(0)$ определено.

Пример: $y = (y')^3$. Тогда $y = p^3$, $\mathrm{d}y = 3p^2\,\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}x = 3p\,\mathrm{d}p$ при $p \neq 0$.

$$x = \frac{3p^2}{2} + C; \quad y = p^3; \quad \text{отдельно } y = 0.$$

Для начального условия $y(x_0) = y_0$ сначала реши $f(p_0) = y_0$, затем найди C из формулы $x(p_0) = x_0$. Параметрические формулы не означают, что p и x можно свободно менять независимо.

Как не перепутать эти два типа

В типе 11 известен $x(p)$: вычисляй $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$ и интегрируй y. В типе 12 известен $y(p)$: вычисляй $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{p}$ и интегрируй x. В обоих случаях $p = y'$, но интегрируемая переменная теперь p.

Проверка параметризации: на участке $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} \neq 0$ вычисли

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}}.$$

Должно получиться p. Затем подставь $x(p), y(p), p$ в исходное равенство.

H1. Отсутствует неизвестная функция

Признак второго порядка: $F(x, y', y'') = 0$, самой y нет. Замена $p(x) = y'$, $y'' = p'$ снижает порядок на один. После решения для p ещё нужно восстановить y интегрированием.

$$F(x, p, p') = 0 \;\Rightarrow\; p = p(x, C_1)$$
$$\Rightarrow\; y = \int p(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2.$$

Пример: $y'' = 2y'$. Получаем $p' = 2p$, откуда $p = C_1 e^{2x}$. Затем $y = \dfrac{C_1}{2} e^{2x} + C_2$; переобозначив $\dfrac{C_1}{2}$, можно написать $y = Ae^{2x} + B$. Решение $p = 0$ включено при $A = 0$.

Условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = v_0$ переходят в $p(x_0) = v_0$ и последующее $y(x_0) = y_0$. Первое выбирает константу для p, второе задаёт константу интегрирования y.

Если нет $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$, вводи $p = y^{(k)}$, решай уравнение меньшего порядка и k раз интегрируй обратно, каждый раз добавляя константу.

H2. Отсутствует независимая переменная

Признак: $F(y, y', y'') = 0$, явного x нет. На участке, где y можно использовать как независимую переменную, введи $p = p(y) = y'$. Производная по x считается по цепочке:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Сначала реши $F(y, p, pp_y) = 0$ для $p(y)$. Потом восстанови $y(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p(y)}$$
$$\Rightarrow\; x = \int \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} + C_2.$$

Постоянные решения $y \equiv c$ проверяй в исходном уравнении отдельно: на них y не может служить независимой переменной.

Пример: $(y')^2 + 2yy'' = 0$. Получаем $p^2 + 2ypp_y = 0$. На ветви $p \neq 0$:

$$p + 2yp_y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{2y}.$$

При $y > 0$: $p = \dfrac{K}{\sqrt{y}}$. Для $y(1) = 1$, $y'(1) = \dfrac{2}{3}$ получаем $K = \dfrac{2}{3}$.

$$y' = \frac{2}{3\sqrt{y}} \;\Rightarrow\; \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x.$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x + C_2 \;\Rightarrow\; y^{\frac{3}{2}} = x$$
$$\Rightarrow\; y = x^{\frac{2}{3}}, \quad x > 0.$$

Все постоянные $y \equiv c$ также решают уравнение без этих начальных условий. При данных условиях они не подходят. Второй удобный путь: $z = p^2$, $z_y = 2pp_y$, тогда $yz_y + z = 0$; после нахождения p^2 знак p выбирают по начальному наклону.

Главное различие: в H1 p зависит от x и $y'' = p'$; в H2 p зависит от y и $y'' = pp_y$. Пропущенный множитель p меняет задачу.

H3. Однородность по функции и производным

Признак: при замене (y, y', y'') на $(\lambda y, \lambda y', \lambda y'')$ все слагаемые получают один и тот же множитель. Например, yy'' и $(y')^2$ имеют одинаковую степень 2. Это другой вид однородности, чем $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

На ветви $y \neq 0$ введи $u = \frac{y'}{y}$, то есть $y' = uy$. Продифференцируй произведение:

$$y'' = u'y + uy' = y(u' + u^2).$$

Подставь y' и y'', сократи общую степень y. Получится уравнение для u более низкого порядка. Затем верни y:

$$\frac{y'}{y} = u(x) \;\Rightarrow\; \ln|y| = \int u\,\mathrm{d}x + C_2$$
$$\Rightarrow\; y = C_2 e^{\int u\,\mathrm{d}x}.$$

Нулевую функцию проверь отдельно в исходном уравнении. Если нужна третья производная: $y''' = y(u'' + 3uu' + u^3)$.

Пример: $yy'' - (y')^2 = y^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

$$y^2(u' + u^2) - u^2y^2 = y^2 \;\Rightarrow\; u' = 1.$$

$$u(0) = \frac{y'(0)}{y(0)} = 0 \;\Rightarrow\; u = x.$$

$$\frac{y'}{y} = x \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow\; y = 2e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Начальное условие для новой функции u равно $\frac{y'(x_0)}{y(x_0)}$, а не просто $y'(x_0)$. После восстановления остаётся использовать значение самой y.

H4. Полная производная

Признак: несколько слагаемых слева складываются в производную выражения меньшего порядка. Найди эту производную, проинтегрируй обе стороны и не потеряй C_1.

$$y'' = (y')'; \quad xy'' + y' = (xy')'.$$

$$yy'' + (y')^2 = (yy')'; \quad 2y'y'' = [(y')^2]'.$$

$$yy''' - y'y'' = [yy'' - (y')^2]'.$$

Пример: $xy'' + y' = 2x$, $x > 0$.

$$(xy')' = 2x \;\Rightarrow\; xy' = x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow\; y' = x + \frac{C_1}{x}.$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln x + C_2.$$

Для $x < 0$ вместо $\ln x$ пишется $\ln |x|$. При прохождении через $x = 0$ нужно отдельно проверять исходное уравнение и гладкость; дробная запись y' не разрешает такой переход автоматически.

Если полная производная не видна, попробуй сгруппировать по правилу произведения. Но нельзя объявлять выражение производной только по похожести: продифференцируй предполагаемую скобку и сравни каждый член и коэффициент.

H5. Обобщённая однородность

Признак: можно подобрать вес m так, что при $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^m y$ каждое слагаемое уравнения получает один общий множитель. Веса: x имеет 1, y имеет m, y' имеет $m-1$, y'' имеет $m-2$. В произведении веса складываются.

Пример распознавания: $yy' + xyy'' - x(y')^2 = x$. Слева каждый член имеет вес $2m-1$, справа 1. Поэтому $2m-1=1$, $m=1$.

На участке $x>0$ замени $x=e^t$, $t=\ln x$, $y=e^{mt}z(t)$. Тогда $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = e^{-t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$:

$$y' = e^{(m-1)t}(\dot z + mz).$$

$$y'' = e^{(m-2)t}\left[\ddot z + (2m-1)\dot z + m(m-1)z\right].$$

Общая формула:

$$y^{(k)} = e^{(m-k)t}(D+m-k+1)\\ \cdots (D+m-1)(D+m)z,$$

где $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. При подстановке общий экспоненциальный множитель сокращается; явного t не остаётся. Дальше применяй H2 к $z(t)$, понижая порядок.

Для примера с $m=1$: $y=e^t z$, $y'=\dot z + z$, $y''=e^{-t}(\ddot z + \dot z)$. После подстановки:

$$z\ddot z - \dot z^2 = 1.$$

Это автономное уравнение; $z \neq 0$ следует из него. Локально при $\dot z \neq 0$ введи $p(z)=\dot z$, затем $w=p^2$: $\dfrac{z}{2}w' - w = 1$, откуда $w = Kz^2 - 1$. Здесь $K>0$; точки $\dot z = 0$ проверяются отдельно. При $k=\sqrt{K}>0$ полный результат: $y = \pm\dfrac{x}{k}\cosh(k\ln x + C)$, $x>0$, где $\cosh v = \dfrac{e^v+e^{-v}}{2}$. Это включает точки $\dot z = 0$ и возврат к исходным переменным.

На $x<0$ сначала положи $s=-x>0$, $Y(s)=y(-s)$: $y'=-Y_s$, $y''=Y_{ss}$. Перепиши уравнение для s, Y и применяй ту же замену $s=e^t$. Уравнения Эйлера являются частным случаем этого подхода, но не исчерпывают тип.

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

Форма:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x), \quad a_n \neq 0,$$

все a_j — постоянные. Это практический алгоритм к билетам 19-22.

1. Для однородной части составь $L(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_0$. Найди корни с кратностями.
2. Действительному корню r кратности m сопоставь $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{m-1}e^{rx}$. Сопряжённой паре $a \pm ib$ — $x^k e^{ax}\cos bx$ и $x^k e^{ax}\sin bx$, $k = 0, \ldots, m-1$.
3. Сложи с произвольными постоянными: получится y_h. Число функций проверь по порядку.
4. Найди одно y_p. Для квазимногочлена используй неопределённые коэффициенты и резонанс; для общей непрерывной правой части — вариацию постоянных или формулу Коши.
5. Запиши $y = y_h + y_p$. Начальные условия накладывай на эту полную сумму.
6. Проверь $L(D)y_h = 0$, $L(D)y_p = f$, затем все начальные условия.

Развилка по правой части

Для $f = P_N(x)e^{ax}$ пробуй $y_p = x^s e^{ax} Q_N(x)$, где s — кратность a как корня L, а $s = 0$, если $L(a) \neq 0$. В Q_N выпиши все степени от N до нуля.

Для $f = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$ пробуй

$$y_p = x^s e^{ax}[R_N(x)\cos bx + S_N(x)\sin bx],$$

где $N = \max(\deg P, \deg Q)$, а s — кратность $a + ib$. Даже если справа есть только косинус, в пробном решении обычно нужны и косинус, и синус.

Полный пример с начальным условием

Решим $y'' - 3y' + 2y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Корни 1 и 2 дают $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Число 1 — простой корень; пробуем $y_p = Axe^x$. Подстановка даёт $L(D)(Axe^x) = -Ae^x$, поэтому $A = -1$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

Из начальных условий $C_1 + C_2 = 0$, $C_1 + 2C_2 - 1 = 1$; следовательно, $C_2 = 2$, $C_1 = -2$. Ответ:

$$y = 2e^{2x} - (x+2)e^x.$$

Нельзя определять C_1, C_2 по начальному условию только для y_h: частное решение тоже меняет значения функции и производных в начальной точке.

Уравнение Эйлера

У уравнения Эйлера коэффициент при производной порядка k содержит x^k. На интервале $x > 0$ введи $t = \ln x$, $Y(t) = y(e^t)$. На $x < 0$ аналогично берётся $t = \ln|x|$ при фиксированном знаке x.

$$xy' = \dot{Y}, \qquad x^2y'' = \ddot{Y} - \dot{Y},$$

$$x^3y''' = \dddot{Y} - 3\ddot{Y} + 2\dot{Y}.$$

Точки означают производные по t. Формулы получаются из цепочки $\frac{d}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}$; нельзя заменить x^2y'' просто на $\ddot{Y}$.

Пример: $x^2y'' - xy' + y = 0$, $x > 0$. Получаем $\ddot{Y} - 2\dot{Y} + Y = 0$, характеристический корень 1 кратности 2. Поэтому

$$Y = (C_1 + C_2 t)e^t, \qquad y = x(C_1 + C_2 \ln x).$$

На отрицательной полуоси эквивалентное вещественное семейство можно записать $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|)$. Переход через $x = 0$ не следует из этой замены: там исходное уравнение вырождается и нужен отдельный анализ.

Когда метод не узнаётся сразу

Сначала приведи уравнение к аккуратному виду, но не дели на потенциально нулевые выражения без проверки. Затем последовательно спроси:

1. Можно ли разделить переменные или собрать производную произведения?
2. Уравнение линейно по y либо по x, если поменять роли переменных?
3. Видно ли отношение $\frac{y}{x}$, линейную комбинацию $ax + by + c$ или пару $h(y), h'(y)y'$?
4. Если запись дифференциальная, совпадают ли M_y и N_x?
5. Если производная входит неявно, помогает ли параметр $p = y'$?
6. Если порядок выше первого, отсутствует ли одна переменная или видна ли полная производная?

Отсутствие знакомого элементарного метода не означает отсутствие решения. Различай «решение существует по теореме», «его можно выразить через интеграл» и «интеграл выражается элементарными функциями».

Практика от вычислений до экзамена

Этот набор дополняет задачи внутри билетов. Сначала реши без подсказки, затем проверь ключ. Правильный ответ без объяснения метода не засчитывай себе как устойчивый навык. После ошибки реши аналогичную задачу с задержкой.

Уровень А проверяет вычислительную основу. Уровень Б — первый порядок и замены. Уровень В — высший порядок и постоянные коэффициенты. Уровень Г — системы, свойства решений и устойчивость. Это уровни сложности, а не официальные баллы экзамена.

Уровень А восемь коротких вычислений

В интегралах указывай интервал допустимости и добавляй константу. Проверь каждую первообразную дифференцированием.

А1. Найди производную $y = x^2 e^{-x}$.

А2. Вычисли $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$.

А3. Вычисли $\displaystyle\int x e^{2x}\,dx$.

А4. Вычисли $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$.

А5. Вычисли $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

А6. Вычисли $\displaystyle\int \sin^2(3x)\,dx$.

А7. Реши $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ с указанием кратностей и выпиши соответствующую ФСР скалярного ЛОУ.

А8. Для $X = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$ найди определитель и проверь, обратима ли матрица при всех t.

Уровень Б двенадцать задач первого порядка

Перед решением напиши тип уравнения и допустимую замену. В задачах без начального условия найди семейства на подходящих интервалах и отдельно проверь потерянные решения.

Б1. $y' = 3xy$, $y(0) = 2$.

Б2. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 0$.

Б3. $y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

Б4. $xy' - y = x^2$, $x > 0$, $y(1) = 0$.

Б5. $y' + y = xy^2$.

Б6. $y' = 1 + (x+y)^2$.

Б7. $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, $x > 0$.

Б8. $(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$.

Б9. $2yy' + y^2 = e^x$. Объясни допустимость обратной замены.

Б10. $y = xy' - (y')^2$. Найди прямолинейное семейство и особую ветвь.

Б11. $x = (y')^2 + 4$. Запиши параметрический ответ.

Б12. $y = (y')^2$. Найди регулярное семейство и постоянное решение. Объясни, могут ли через $(0, 0)$ проходить разные решения.

Уровень В девять задач высшего порядка

В1. $y'' = 3y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

В2. $yy'' = (y')^2$ на ветви $y \neq 0$. Какие постоянные решения допускает исходное уравнение?

В3. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $x > 0$.

В4. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

В5. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

В6. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

В7. $y'' - y = x$.

В8. $y'' - 2y' + y = e^x$.

В9. $y'' + 4y = \cos 2x$. Почему правую часть нельзя обработать пробной функцией $A\cos 2x + B\sin 2x$?

Уровень Г восемь задач по системам и свойствам

Здесь особенно важно читать кванторы: «существует решение» и «все решения» задают разные вопросы. Область времени тоже является частью условия.

Г1. Реши систему $u_1' = u_1 + u_2$, $u_2' = u_2$. Определи устойчивость нулевого решения.

Г2. Реши $u_1' = u_2$, $u_2' = -u_1$ и опиши движение. Является ли нуль асимптотически устойчивым?

Г3. Для $x' = ax$, $y' = -y$ классифицируй нуль при $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

Г4. При каких a у $y'' + ay = \cos x$ существует хотя бы одно периодическое решение? А когда все решения ограничены на $[0, +\infty)$?

Г5. При каких a все решения $y' + ay = 1$ ограничены на $[0, +\infty)$?

Г6. При каких a все решения $y'' + 2ay' + (a^2 - 1)y = e^{-x}$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

Г7. Построй линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, общее решение которого $y = C_1e^{2x} + C_2\sin 2x + C_3\cos 2x + 1$.

Г8. Определи устойчивость решения $u(t) \equiv 0$ уравнения $u' = (4 - t^2)u$ при фиксированном начальном моменте $t_0 = 0$. Можно ли судить только по знаку коэффициента при $t = 0$?

Задачи Г4-Г8 основаны на проверенных условиях предоставленной рукописной подборки:

PDF с. 5-7. Решения ниже получены заново, поскольку в исходных разборах есть ошибки. Г1-Г3 и остальные уровни — учебные варианты.

Разбор уровня А

A1 Правило произведения даёт $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$. Знак у второй части связан с производной $-x$.

A2 При $u = 1 + x^3$ получаем $du = 3x^2dx$, поэтому ответ $\ln|1 + x^3| + C$. Нельзя проходить через $x = -1$, где подынтегральная функция не определена.

A3 По частям $u = x$, $dv = e^{2x}dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

A4 Разложение

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right)$$

даёт $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$. Интервалы не должны содержать ± 2.

A5 $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$, поэтому ответ $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + C$. Он определён на всей $\mathbb{R}$.

A6 $\sin^2(3x) = \frac{1-\cos 6x}{2}$. Интеграл равен $\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C$.

A7 Многочлен равен $(\lambda - 1)^3$. ФСР: e^x, xe^x, x^2e^x. Запись трёх одинаковых e^x не даёт независимую систему.

A8 $\det X = -1 - 1 = -2$. Матрица обратима при любом t. Сам факт, что каждый её элемент ненулевой, обратимость не доказывает: решает определитель.

Разбор уровня Б

Б1 Разделение при $y \neq 0$ даёт $\ln|y| = \frac{3x^2}{2} + C$. После добавления нулевого решения всё семейство записывается как $y = Ce^{\frac{3x^2}{2}}$. Из $y(0) = 2$:

$$y = 2e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

Проверка производной даёт $y' = 6xe^{\frac{3x^2}{2}} = 3xy$.

Б2 $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$, поэтому $\arctan y = \arctan x + C$ на подходящем интервале. Начальное условие даёт $C = 0$, откуда $y = x$ на всей $\mathbb{R}$. Проверка: обе стороны исходного уравнения равны 1. Здесь использование арктангенса не создаёт ограничения $|x| < \frac{\pi}{2}$: это ошибочное смешение переменной и значения функции.

Б3 Интегрирующий множитель e^{2x}: $(ye^{2x})' = e^x$. Отсюда $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$, $C = -1$. Ответ $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

Б4 При $x > 0$ разделим на x: $y' - \frac{y}{x} = x$. Множитель $\frac{1}{x}$, поэтому $(\frac{y}{x})' = 1$. Значит, $y = x^2 + Cx$. Начальное условие даёт $C = -1$, то есть $y = x^2 - x$.

Б5 Это Бернулли с показателем 2. При $y \neq 0$ введём $z = \frac{1}{y}$: $z' - z = -x$. Частное решение $z_p = x + 1$, общее $z = x + 1 + Ce^x$. Поэтому

$$y = \frac{1}{x + 1 + Ce^x}, \qquad \text{отдельно } y = 0.$$

Выбираются интервалы без нулей знаменателя. Поочерёдное перепрыгивание через полюс не является продолжением конечного классического решения.

Б6 Положим $z = x + y$. Тогда $z' = 1 + y' = 2 + z^2$. Интегрирование даёт

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \frac{z}{\sqrt{2}} = x + C_1, \qquad y = \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + C) - x.$$

Ответ рассматривается между соседними полюсами тангенса. У $z^2 + 2$ нет действительных нулей, поэтому потерянных действительных постоянных z нет.

Б7 Подстановка $y = xv$ даёт $v + xv' = v + v^2$, то есть $xv' = v^2$. При $v \neq 0$: $-\frac{1}{v} = \ln x + C$. Следовательно,

$$y = -\frac{x}{\ln x + C}, \qquad \text{отдельно } y = 0, \qquad x > 0.$$

Начальный нулевой случай нельзя искать в формуле как «$C = \infty$»: его проверяют прямо.

Б8 $M_y = 2x = N_x$. Интегрируя M по x, получаем $\Phi = x^2y + 3x + g(y)$. Из $\Phi_y = N$ следует $g' = 2y$, поэтому

$$x^2y + 3x + y^2 = C.$$

На участках, где $\Phi_y = x^2 + 2y \neq 0$, неявная формула задаёт гладкий график $y(x)$. При обращении этого выражения в нуль нужен отдельный анализ, а не формальное деление.

Б9 Замена $z = y^2$ даёт $z' + z = e^x$. Множитель e^x:

$$z = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}$$

на интервалах, где подкоренное выражение положительно. При его нуле исходное уравнение требовало бы $0 = e^x$, что невозможно для конечной производной. Поэтому эти точки не принадлежат гладкому решению; нулевое решение также не подходит.

Б10 Клеро: $p = y'$, $y = xp - p^2$. После дифференцирования $(x - 2p)p' = 0$. Прямые $y = Cx - C^2$; особая ветвь $p = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x^2}{4}$. Её производная $\frac{x}{2}$ действительно удовлетворяет исходному равенству. Особая ветвь не получается подстановкой одной постоянной C во всё прямолинейное семейство.

Б11 $p = y'$, $x = p^2 + 4$, $dx = 2p\,dp$. Поэтому

$$x = p^2 + 4, \qquad y = \frac{2}{3}p^3 + C.$$

На ветвях $p > 0$ и $p < 0$ это $y = \pm\frac{2}{3}(x - 4)^{\frac{3}{2}} + C$, $x > 4$. Само значение $p = 0$ не задаёт решение на интервале, поскольку фиксирует $x = 4$.

Б12 Из $y = p^2$ имеем $dy = 2p\,dp = p\,dx$. При $p \neq 0$: $x = 2p + C$, поэтому $y = \frac{(x-C)^2}{4}$. Отдельно $y = 0$. Через $(0, 0)$ проходят и нулевая функция, и $y = \frac{x^2}{4}$; допустимы также гладкие склейки нулевого участка с параболической ветвью. Неявное уравнение $y = (y')^2$ не обладает здесь гипотезами единственности разрешённого уравнения с локально липшицевой правой частью.

Разбор уровня B

B1 Положим $p = y'$: $p' = 3p$, $p = Ce^{3x}$. Из $p(0) = 3$: $p = 3e^{3x}$. После интегрирования $y = e^{3x} + D$, а $y(0) = 1$ даёт $D = 0$. Ответ e^{3x}.

B2 При $y \neq 0$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0.$$

Значит, $\frac{y'}{y} = k$, $y = Ce^{kx}$, $C \neq 0$. Все постоянные функции, включая нуль, удовлетворяют исходному уравнению. Нуль добавляют отдельно; ненулевые постоянные включены при $k = 0$.

B3 При $t = \ln x$ получаем $\ddot{Y} - 4Y = 0$, поэтому $Y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$. Ответ $y = C_1x^2 + C_2x^{-2}$, $x > 0$.

B4 Корни 2 и 3: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Условия: $C_1 + C_2 = 1$, $2C_1 + 3C_2 = 0$. Поэтому $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

B5 Корень -2 кратности 2: $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$. Из $y(0) = 0$ получаем $C_1 = 0$; из $y'(0) = 1$ — $C_2 = 1$. Ответ xe^{-2x}.

B6 Корни $-1 \pm 2i$: $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Условия дают $A = 1$, $-A + 2B = 1$, то есть $B = 1$. Ответ $e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$.

B7 Однородная часть $C_1e^x + C_2e^{-x}$. Пробуем $y_p = Ax + B$: $y_p'' - y_p = -Ax - B = x$, откуда $A = -1$, $B = 0$. Ответ $C_1e^x + C_2e^{-x} - x$.

B8 Корень 1 кратности 2 совпадает с экспонентой правой части. Пробуем $y_p = Ax^2e^x$. Формула смещения даёт $(D-1)^2(Ax^2e^x) = 2Ae^x$; $A = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$y = e^x\left(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}\right).$$

B9 Функции $\cos 2x$ и $\sin 2x$ уже решают однородное уравнение, поэтому такая пробная комбинация даст нуль вместо правой части. Частное решение $y_p = (\frac{x}{4})\sin 2x$: прямое вычисление даёт $y_p'' + 4y_p = \cos 2x$. Ответ

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x.$$

Рост амплитуды частного решения связан с резонансом; он не устраняется подбором постоянных однородной части.

Разбор уровня Г

Г1 Сначала $u_2 = C_2 e^t$. Тогда $u_1' - u_1 = C_2 e^t$, поэтому $u_1 = e^t(C_1 + C_2 t)$. Получаем

$$u = e^t \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица имеет жорданову клетку с собственным числом 1. Нуль неустойчив; это видно уже по решению $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, растущему как e^t.

Г2 $u_1 = A\cos t + B\sin t$, $u_2 = -A\sin t + B\cos t$. Сумма квадратов равна $A^2 + B^2$; движение по окружности направлено по часовой стрелке, потому что в точке $(1, 0)$ скорость $(0, -1)$. Нуль устойчив: начальная норма сохраняется. Он не асимптотически устойчив: ненулевые решения не приближаются к нулю.

Г3 Собственные числа a и -1. При $a < 0$ нуль — асимптотически устойчивый узел; при $a = -1$ это звёздный узел. При $a > 0$ — неустойчивое седло. При $a = 0$ прямая $y = 0$ состоит из равновесий; нуль не изолирован, поэтому классификация изолированных узлов к нему не применяется. Он устойчив, но не асимптотически: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0 e^{-t}$.

Г4 Если $a \neq 1$, периодическое частное решение $y_p = \frac{\cos x}{a-1}$ существует, в том числе при $a \leq 0$. При $a = 1$ все решения содержат резонансное слагаемое $(\frac{x}{2})\sin x$, поэтому периодического решения нет. Ответ на первый вопрос: $a \neq 1$.

Для ограниченности всех решений нужны ограниченная однородная часть и отсутствие резонанса. При $a > 0$ однородные решения гармонические; при $a = 0$ есть $C_2 x$, при $a < 0$ есть растущая экспонента. Ответ на второй вопрос: $a > 0$, $a \neq 1$. Два ответа различаются из-за слова «все».

Г5 При $a \neq 0$: $y = \frac{1}{a} + Ce^{-ax}$. Все решения ограничены на правой полуоси тогда и только тогда, когда $a > 0$. При $a < 0$ некоторые решения растут, хотя постоянное решение остаётся ограниченным; при $a = 0$: $y = x + C$, все решения неограниченны.

Г6 Характеристические корни $-a + 1$ и $-a - 1$. Необходимое условие затухания всех решений: оба отрицательны, то есть $a > 1$; иначе разность двух решений может не стремиться к нулю.

Если $a > 1$, $a \neq 2$, можно взять

$$y_p = \frac{e^{-x}}{a(a-2)}.$$

Действительно, подстановка e^{-x} в оператор даёт $a(a-2)e^{-x}$, а не $(a^2-1)e^{-x}$. При $a = 2$ возникает простой резонанс: $y_p = (\frac{x}{2})e^{-x}$, и он тоже стремится к нулю. Значит, условие $a > 1$ достаточно и необходимо.

Г7 Для однородной части нужны корни $2, 2i, -2i$, поэтому

$$L(D) = (D-2)(D^2+4) = D^3 - 2D^2 + 4D - 8.$$

Для частного решения 1 получаем $L(D)1 = -8$. Искомое нормированное уравнение

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = -8.$$

Линейная независимость трёх однородных функций и порядок 3 подтверждают, что записано именно общее решение.

Г8 Разность решений и само решение с начальным значением u_0 равны

$$u(t) = u_0 \exp\left(4t - \frac{t^3}{3}\right), \qquad t \geq 0.$$

Функция $4t - \frac{t^3}{3}$ достигает максимума при $t = 2$, и максимум равен $\frac{16}{3}$. Поэтому $|u(t)| \leq |u_0| e^{\frac{16}{3}}$. Для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon e^{-\frac{16}{3}}$. Это доказывает устойчивость при $t_0 = 0$. Поскольку показатель стремится к $-\infty$, решение стремится к нулю; нуль асимптотически устойчив. Положительный коэффициент в начале даёт временный рост, но не отменяет итоговый вывод.

Три пробника для закрепления

Это учебные подборки, а не утверждение об официальном формате. В каждом пробнике есть устная часть, доказательство или обоснование и самостоятельная базовая задача. Время подготовки и ответа нужно согласовать с реальным регламентом, когда он станет известен.

Пробник первый

1. Сформулируй Коши-Липшица. Объясни, что меняется в теореме Пеано.
2. Докажи эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения. В каком месте нужна непрерывность?
3. Реши $y' - y = 2x$, $y(0) = 0$, и проверь результат.
4. Приведи уравнение с неединственным решением через одну начальную точку; выпиши хотя бы два решения и проверь их.

Ключ к задаче 3: $y = 2e^x - 2x - 2$. Для задачи 4 подойдёт $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$: $y = 0$ и $y = x^3$. Во втором примере $3|x^3|^{\frac{2}{3}} = 3x^2 = y'$.

Пробник второй

1. Дай определения ФСР, фундаментальной матрицы и Вронскиана. Скажи, для каких функций верна альтернатива «всюду нуль или нигде нуль».
2. Докажи формулу Лиувилля-Остроградского для системы двух уравнений. Перенеси результат на скалярное линейное уравнение второго порядка.
3. Реши $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4. Восстанови ЛОУ с постоянными коэффициентами по ФСР $1, e^x, e^{-x}$.

Ключ к задаче 3: $y = e^{2x}(x + \frac{x^2}{2})$. К задаче 4: $y''' - y' = 0$. Скалярная формула: для $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ имеем $W(x) = W(x_0)\exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds)$.

Пробник третий

1. Сформулируй устойчивость и асимптотическую устойчивость при фиксированном t_0, затем спектральный критерий для постоянной матрицы.
2. Объясни роль жордановых клеток при $\Re\lambda = 0$; приведи пример неустойчивости при нулевых собственных числах.
3. Классифицируй $x' = -x - y$, $y' = x - y$; задай направление вращения и изменение радиуса.
4. Для $x' = -x + x^2$, $y' = -2y$ исследуй устойчивость нуля по первому приближению. Скажи, локален или глобален полученный вывод.

Ключ: в задаче 2 подойдёт $x' = y, y' = 0$, решения $y = C_2, x = C_1 + C_2 t$. В задаче 3 собственные числа $-1 \pm i$, устойчивый фокус, $r' = -r$, $\theta' = 1$, вращение против часовой стрелки. В задаче 4 матрица $\mathrm{diag}(-1, -2)$ даёт локальную асимптотическую устойчивость. Глобальность неверна: например, при $x(0) > 1$ скалярная компонента растёт.

Как оценить пробник честно

Проверяй раздельно условия теоремы, доказательство, выбор метода, вычисления, область решения и контроль подстановкой. Ошибка в одном месте не означает «не знаю весь курс», но и красивый рассказ не заменяет нерешённую базовую задачу.

После разбора выбери максимум два конкретных ремонта. На следующей проверке измени коэффициенты задачи или спроси доказательство с другого входа: например, не «расскажи Вронскиан», а «почему совпадение начальных данных здесь даёт зависимость на всём интервале?». Цель — восстановить рассуждение, а не узнавать знакомую страницу.

Практика по снимкам доски: самостоятельная №2

Снимки IMG_1925–IMG_1943 показывают разбор второго пробного варианта. Повторные кадры сохранены в фотоальбоме. Условия ниже взяты из файла «samost2example.pdf»; в первой задаче второго варианта используем $7e^{2x}$, как напечатано на листе. Отдельное e^{12x} на ранней записи доски не подменяет условие пробника. Разбор здесь выполнен заново с проверкой подстановкой.

Что означают обозначения доски

$y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного уравнения; $y_{\text{ч.н.}}$ — одно частное решение неоднородного. Тогда $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Буквы C_j — произвольные постоянные общего решения. Буквы $A_j, B_j, \ldots$ в пробном частном решении определяются подстановкой; они не являются дополнительными произвольными постоянными.

Для блока $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x]$ берём $\mu = \alpha + i\beta$, $N = \max(m, n)$, s — кратность μ в характеристическом многочлене. Пробная форма:

$$x^s e^{\alpha x}\left[A_N(x)\cos\beta x + B_N(x)\sin\beta x\right].$$

Оба многочлена имеют все степени от нуля до N с пока неизвестными коэффициентами. Блоки с одинаковыми α, β предварительно объединяются. В задаче №1 коэффициенты можно не вычислять; вид ФСР и кратности нужно получить точно.

Задача 1: второй вариант, как на доске

$$y^{(4)} - 5y''' + 7y'' - 5y' + 6y = 7e^{2x} + x^2\cos 3x + xe^{-2x}\cos 3x \\ + (x^7 + 5)e^{-2x}\sin 7x + 3x^3 + 4e^{7x} + 3\cos x.$$

Даны корни $2, 3$. Деление многочлена на $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ даёт $\lambda^2 + 1$:

$$L(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 + 1).$$

Все корни $2, 3, i, -i$ простые. Поэтому

$$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Разберём каждое слагаемое отдельно.

1. $7e^{2x}$: $\mu = 2$, $N = 0$, $s = 1$, поэтому $y_1 = Axe^{2x}$.
2. $x^2\cos 3x$: $\mu = 3i$, $N = 2$, $s = 0$. Берём

$$y_2 = (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos 3x + (D_2x^2 + D_1x + D_0)\sin 3x.$$

Синуса справа нет, но в пробной форме он нужен из-за производных.

3. $xe^{-2x}\cos 3x$: $\mu = -2+3i$, $N=1$, $s=0$:

$$y_3 = e^{-2x}[(E_1x+E_0)\cos 3x + (F_1x+F_0)\sin 3x].$$

4. $(x^7+5)e^{-2x}\sin 7x$: $\mu = -2+7i$, $N=7$, $s=0$:

$$y_4 = e^{-2x}[G_7(x)\cos 7x + H_7(x)\sin 7x].$$

   G_7, H_7 — полные многочлены степени не выше семи с отдельными неизвестными коэффициентами; постоянное 5 уже учтено в этом блоке.

5. $3x^3$: $\mu = 0$, $N=3$, $s=0$, поэтому $y_5 = I_3x^3 + I_2x^2 + I_1x + I_0$.
6. $4e^{7x}$: $\mu = 7$, $N=0$, $s=0$, поэтому $y_6 = Je^{7x}$.
7. $3\cos x$: $\mu = i$, $N=0$, $s=1$, поэтому $y_7 = x(K\cos x + M\sin x)$.

Ответ: $y = y_{\text{о.о.}} + y_1 + \dots + y_7$. Только $C_1, \dots, C_4$ произвольны; все остальные коэффициенты однозначно определяются в выбранной пробной форме.

Задача 1: первый вариант и двойной резонанс

Здесь $L(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 6\lambda^2 + 14\lambda + 637$, даны два корня 7. Делим на $(\lambda-7)^2$:

$$L(\lambda) = (\lambda-7)^2(\lambda^2+4\lambda+13), \quad \lambda = 7 \text{ (кратность } 2), \ -2\pm 3i.$$

Проверка знака: комплексная пара имеет вещественную часть -2, поскольку $\lambda^2+4\lambda+13 = (\lambda+2)^2+9$. Поэтому

$$y_{\text{о.о.}} = e^{7x}(C_1+C_2x) + e^{-2x}(C_3\cos 3x + C_4\sin 3x).$$

В первом варианте справа нет отдельного $7e^{2x}$. Для остальных блоков изменения относительно предыдущего разбора таковы:

- $x^2\cos 3x$: $\mu = 3i$ не корень, $s=0$; остаются два полных многочлена степени два.
- $xe^{-2x}\cos 3x$: теперь $\mu = -2+3i$ — простой корень, $s=1$; берём $xe^{-2x}[(Ax+B)\cos 3x + (Dx+E)\sin 3x]$.
- $(x^7+5)e^{-2x}\sin 7x$: $s=0$, пара многочленов степени семь.
- $3x^3$: полный многочлен степени три.
- $4e^{7x}$: $s=2$, поэтому Ax^2e^{7x}.
- $3\cos x$: i не корень, поэтому $A\cos x + B\sin x$ без множителя x.

Нельзя переносить кратности из одного варианта в другой. Во всех случаях общее решение содержит четыре произвольные постоянные.

Задача 2: второй вариант, построение ядра по системе

Решаем $y''+2y'+2y = e^{\cos x}$. Корни $-1\pm i$, поэтому ФСР $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$. Ищем

$$K(x,s) = C_1(s)e^{-x}\cos x + C_2(s)e^{-x}\sin x.$$

Условия $K(s,s)=0$, $K_x(s,s)=1$ дают после умножения на e^s:

$$\begin{cases} C_1\cos s + C_2\sin s = 0, \\ C_1(-\cos s - \sin s) + C_2(\cos s - \sin s) = e^s. \end{cases}$$

Прибавим первую строку ко второй: $-C_1\sin s + C_2\cos s = e^s$. Матрица поворота обратима, и получаем $C_1 = -e^s\sin s$, $C_2 = e^s\cos s$. Следовательно,

$$K(x,s) = e^{s-x}[\sin x\cos s - \cos x\sin s] = e^{-(x-s)}\sin(x-s).$$

Полное решение:

$$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + \int_0^x e^{-(x-s)}\sin(x-s)e^{\cos s}\,ds.$$

Правая часть непрерывна на всей $\mathbb{R}$; нижний предел 0 допустим. Другой фиксированный предел меняет лишь однородную составляющую. Условия пробника не требуют вычислять интеграл.

Задача 2: первый вариант

Для $y''-4y'+13y = e^{\sin x}$ корни $2\pm 3i$. При $r=x-s$ ядро

$$K(x,s) = \frac{1}{3}e^{2r}\sin 3r.$$

Действительно, при $r=0$ оно равно нулю, а $K_x = e^{2r}(\cos 3r + \frac{2}{3}\sin 3r)$ равна единице. Функция решает однородное уравнение по x. Значит,

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{3}\int_0^x e^{2(x-s)}\sin 3(x-s)e^{\sin s}\,ds.$$

Эта комплексная пара $2\pm 3i$ относится к задаче №2. В задаче №1 первого варианта пара другая: $-2\pm 3i$. Знак определяется конкретным характеристическим многочленом.

Задача 3: второй вариант, все коэффициенты

$$y''+2y'+2y = 3e^x + 4\sin x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2/5.$$

Однородная часть $e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Для $3e^x$ берём Ae^x. Подстановка даёт $5A=3$, поэтому $A=3/5$.

Для $4\sin x$ берём $B\cos x + D\sin x$. Производные:

$$y_p' = -B\sin x + D\cos x, \qquad y_p'' = -B\cos x - D\sin x.$$

После подстановки получаем $(B+2D)\cos x + (D-2B)\sin x = 4\sin x$, откуда

$$B+2D=0, \quad D-2B=4; \qquad D=4/5,\ B=-8/5.$$

Значит,

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \tfrac{3}{5}e^x - \tfrac{8}{5}\cos x + \tfrac{4}{5}\sin x.$$

Первое условие: $C_1 + 3/5 - 8/5 = 0$, поэтому $C_1 = 1$. Производная однородной части в нуле равна $-C_1 + C_2$, а производная частной — $3/5 + 4/5 = 7/5$. Второе условие даёт $-1 + C_2 + 7/5 = 2/5$, откуда $C_2 = 0$.

$$\boxed{y = e^{-x}\cos x + \tfrac{3}{5}e^x - \tfrac{8}{5}\cos x + \tfrac{4}{5}\sin x.}$$

Задача 3: первый вариант

$$y'' - 4y' + 13y = 3e^{x} + 4\sin x, \quad y(0) = -3/5, \quad y'(0) = 8/5.$$

Для экспоненты $L(1) = 10$, поэтому $y_{p,1} = 3e^{x}/10$. Для $y_{p,2} = B\cos x + D\sin x$ получаем

$$(12B - 4D)\cos x + (4B + 12D)\sin x = 4\sin x.$$

Первое уравнение даёт $D = 3B$; второе — $40B = 4$. Значит $B = 1/10$, $D = 3/10$.

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \tfrac{3}{10}e^{x} + \tfrac{1}{10}\cos x + \tfrac{3}{10}\sin x.$$

Из $y(0) = C_1 + 2/5 = -3/5$ имеем $C_1 = -1$. Производная в нуле: $2C_1 + 3C_2 + 3/5 = 8/5$, поэтому $C_2 = 1$.

$$\boxed{y = e^{2x}(-\cos 3x + \sin 3x) + \tfrac{3}{10}e^{x} + \tfrac{1}{10}\cos x + \tfrac{3}{10}\sin x.}$$

Оба ответа проверены в исходных уравнениях и по обоим начальным условиям. Если твой лист задания имеет другое условие, сначала меняется условие, затем повторяются эти шаги; готовый ответ между вариантами не переносится.

Минимум производных, нужный прямо сейчас

$$(x^{m})' = mx^{m-1}, \quad (e^{ax})' = ae^{ax},$$
$$(\sin ax)' = a\cos ax, \quad (\cos ax)' = -a\sin ax,$$
$$(\tan ax)' = a/\cos^{2} ax, \quad (\cot ax)' = -a/\sin^{2} ax,$$
$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x),$$
$$(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx),$$
$$(e^{ax}\sin bx)' = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx).$$

Производная $e^{\cos x}$ равна $-e^{\cos x}\sin x$, а $e^{\sin x}$ — $e^{\sin x}\cos x$. В интегральной формуле Коши правую часть оставляем под интегралом: дифференцировать tan или cot для самой записи решения не нужно. При проверке задач с разрывами сначала выбираем интервал непрерывности.

Источники и границы точности

Что лежит в основе пособия

1. **Предоставленные записи лекций того же преподавателя.** Файл «Диффуры_251209_134605.pdf», 113 страниц. Это рукописные учебные записи; приоритет для сверки содержания и обозначений отдан им. Этот старый PDF содержит материал до начала автономных систем. В новой редакции автономные системы, фазовые портреты и линейная устойчивость дополнительно сверены с фотографиями IMG_2009–IMG_2027; тем первого приближения и Лотки–Вольтерры на этих снимках нет. Наличие конспекта не означает, что каждая переписанная строка безошибочна.
2. **Сборник Якуба.** Файл «фуры(2).pdf», 133 страницы. На обложке: Москва, 2025; «Подготовил: Якуб»; версия 2.0. Он задаёт последовательность всех 30 билетов. Его оглавление перечисляет только 1-25, но в конце есть 26-30. Это студенческий сборник, а не подтверждённый текущий официальный список.
3. **Старый вопросник.** Файл с началом имени «b0eee40e», 65 страниц, обложка БПМ204, Москва, 2021. Содержит 28 вопросов, в значительной части соответствующих новым 30. Использован для сопоставления состава и требований; номера не взаимозаменяемы.
4. **Семинарские записи.** Файл «Дифуры_251202_122455.pdf», 132 страницы. Основа перечня дополнительных методов первого порядка и понижения порядка. Рукописные вычисления проверены при переносе выбранных примеров.
5. **Рукописная подборка задач.** «Задачи диффуры (1).pdf», 24 страницы. Содержит условия, повторы и неполные разборы; не является проверенным решебником. Неполные и противоречивые условия не восстановлены догадкой.

Номера страниц в этом пособии относятся к физическим страницам PDF, начиная с обложки как страницы 1. Напечатанная внутри исходника нумерация может отличаться. Слова «Лекции», «Якуб», «старый вопросник» в начале билета отсылают к этому перечню.

Пользователь подтвердил, что преподаватель тот же. Текущий официальный список 2026/2027 пока недоступен. Поэтому здесь даны математически проверенные рабочие формулировки, а не обещание дословного совпадения с требованиями преподавателя. Когда список появится, сверяются название, объём доказательства и дополнительные условия; уже освоенная математика сохраняется.

Где требуется доказательство

По вопросам в новом сборнике доказательная часть явно существенна в билетах 5, 9, 10, 13-25 и 28; некоторые билеты содержат несколько утверждений. В билете 4 требуются обоснование достаточных условий Липшица и пример более слабого условия.

Билеты 6, 11, 29 требуют формулировку соответствующей общей теоремы и понимание применения, без полного доказательства теоремы Пеано, общей локальной теоремы для высшего порядка или теоремы о первом приближении. В 26 и 30 именованные теоремы Пуанкаре и Пуанкаре-Перрона даны как формулировки с приложениями. В 27 определения

применяются для доказательства устойчивости или неустойчивости конкретных примеров.

В билете 15 новый вопрос просит доказательства производной определителя и формулы Лиувилля-Остроградского для $n = 2$. Общая формула приведена, но требование полного доказательства для произвольного порядка не приписывается этому вопросу.

В старом вопроснике для части тем требования слабее. Здесь выбран объём нового сборника: например, в 24 разобрано доказательство оценки степени векторного квазимногочлена, а в 28 — доказательство спектрального критерия. Это разумная страховка по последнему доступному составу, а не утверждение об официальном изменении программы.

Какие ошибки нельзя заучивать

1. **Кванторы Липшица.** Нужна одна константа L, подходящая для всех рассматриваемых пар, а не новая константа для каждой пары. В старом вопроснике, PDF с. 10, порядок кванторов напечатан неверно.
2. **Интегральная форма.** Верхний предел равен текущей независимой переменной x: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$. В старом вопроснике, PDF с. 12, есть описка в пределе.
3. **Бернулли.** При произвольной действительной степени нельзя автоматически брать все отрицательные y. Нарушение достаточного условия Липшица само по себе не доказывает неединственность. Эти оговорки нужны и к сборнику, PDF с. 30-32, и к рукописным записям.
4. **Вронскиан.** Для альтернативы по значению в одной точке у скалярного уравнения порядка n берут n решений и полный $n \times n$ Вронскиан. Нельзя переносить этот вывод на произвольные $k < n$ функций. В новом сборнике, PDF с. 78, условие пропущено в одном из пунктов; в лекциях, PDF с. 75, оно подчёркнуто.
5. **Кратные корни.** В новом билете 20, PDF с. 89, вопрос по ошибке повторяет слово «некратных» из предыдущего билета. Заголовок и содержание посвящены кратным корням.
6. **Жорданова цепочка.** Правильно $(A - \lambda E)v_j = v_{j-1}$. Определитель вместо матрицы в старом вопроснике, PDF с. 45, превращает равенство в бессмыслицу.
7. **Степени многочленов.** Оценка «не выше» не означает, что степень обязана достигаться для каждого решения и каждой правой части. Особенно важно в билетах 23-24, новый сборник, PDF с. 104, 108.
8. **Фокус и цикл.** Спирали линейного фокуса не являются замкнутыми циклами. Для $y' = \frac{x+y}{x-y}$ на $y = -x$ наклон нулевой, а на $y = x$ направление вертикальное. В исходниках есть неверные подписи.
9. **Устойчивость и асимптотическая устойчивость.** Спектральный критерий устойчивости допускает и случай всех отрицательных вещественных частей. Чтобы назвать устойчивость неасимптотической, дополнительно нужно хотя бы одно собственное число на мнимой оси, причём все клетки для таких чисел должны быть одномерными. Новый сборник, PDF с. 127, смешивает название и условие.
10. **Периодичность и ограниченность.** Для $y'' + ay = \cos x$ периодическое частное решение есть при $a \neq 1$; все решения ограничены на правой полуоси только при $a > 0$, $a \neq 1$. Рукописные ответы на PDF с. 11 и 19-20 не учитывают различие вопросов и резонанс.

Что добавлено для понимания

Учебные примеры, вопросы самопроверки, вычислительные приложения и пробники составлены или переработаны для этого пособия. Некоторые короткие доказательства приведены сверх минимального требования и помечены как объяснение или дополнение. В частности, первый интеграл модели Лотки-Вольтерры помогает строго обосновать замкнутость положительных траекторий; это самостоятельное обоснование, не цитата из предоставленного конспекта.

Ни один файл сам по себе не подтверждает дату будущей комиссии, правила допуска или итоговую оценку. План подготовки учитывает выбранные пользователем сроки, а качество освоения проверяется самостоятельными ответами и задачами.

Новые источники редакции 22 ноября

79 фотографий тетради и 19 снимков доски перечислены в «Реестре фотографий». Для каждого рукописного вопроса указаны файлы и соответствующие главы. IMG_2000 среди найденных файлов отсутствует; никаких выводов о содержании отсутствующего кадра не сделано. Вопрос 22 тетради содержит только формулировку, вопрос 26 — начало доказательства. Дополнения восстановлены математически и выделены отдельными блоками.

Для независимой проверки границ продолжения и поведения жордановых блоков использовано авторское издание G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*: раздел 2.6 и раздел 3.2. Авторский PDF Венского университета. Остальные объяснения и вычисления выполнены по приведённым определениям; текст книги не воспроизводился.

Полный курс старой редакции сохранён как математическая основа. Новые объяснения добавлены по всем вопросам фотографий; это не заявление о повторной независимой проверке каждой строки всех старых задач. Для новых явных решений, ядер Коши, факторизаций и примеров векторного резонанса выполнена символьная проверка; освоение материала самим учащимся пока не проверено.